Logique :

Résumé du cours à l'HELHO.

Attention :
Ce résumé ne supplante en rien les notes de cours et le livre de référence, mais est une aide à l'étude basée sur le cours. Des erreurs possibles se sont peut-être insérées dans ce résumé. Merci de nous en faire part si tel est le cas à l'adresse ttb@be.tf.

Merci à Frédéric Verbrugghe pour l'élaboration de certains schémas.

Résumé de logique :

Chapitre I : Etude du système binaire.

1. Les nombres et leur représentation.

a) Définitions.

Un *nombre* est représenté dans un système de numération et est composé de chiffres.
Un *système de numération* est caractérisé par les différents chiffres utilisé pour représenter des nombres.

Système de numération	Base	
Décimal	10	{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Octal	8	{0,1,2,3,4,5,6,7}
Binaire	2	{0,1}
Hexadécimal	16	{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

b) Numération de position

$1230_{10} = 1.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 0.10^0$

Ainsi, un nombre dans la base 10 : N_{10} : $(d_3\, d_2\, d_1\, d_0)_{10} = d_3.10^3 + d_2.10^2 + d_1.10^1 + d_0.10^0$

Et si on généralise à une base quelconque , on a :

$$\begin{array}{cccc} (C_3 & C_2 & C_1 & C_0)_B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \end{array} \Rightarrow d_3.B^3 + d_2.B^2 + d_1.B^1 + d_0.B^0$$

Où d_nB^n = *terme de rang n*

c) Les nombres et les ordinateurs

Le système de numération utilisé par les ordinateurs est le système binaire. On parle donc de bit (binary digit) pour chaque stockage d'information.
1 nombre est codé sur 8 bits = 1 octet = 1 byte.
16 bits = 1 word
32 bits = 1 dword
Vocabulaire : MSD ou MSB = more significant digit ou bit (= bit de poids fort).
LSD ou LSB = less significant digit ou bit (=bit de poids faible).

d) Les nombres fractionnaires

2 systèmes :
Virgule fixe : on réserve un nombre de bits fixe pour la partie entière et la partie fractionnaire.
Virgule flottante : dans la normalisation, on s'arrange pour que la partie entière soit nulle.

Nombre de chiffres significatifs : ils sont comptés à partir du premier chiffre non nul dans le sens normal de la lecture.

e) Les nombres négatifs

En valeur absolue plus signe, le bit de poids fort représente le signe. S'il vaut 0, le nombre est positif, s'il vaut un, le nombre est négatif…

On va utiliser une autre représentation pour que $N_b + (-N_b) = 0$. C'est à dire qu'on va utiliser le complément du nombre positif pour avoir le nombre négatif.
Le complément d'un chiffre est la valeur qu'il faut ajouter à ce chiffre pour qu'il obtienne la valeur maximale que le chiffre peut prendre dans ce rang.
En binaire, le complément restreint est le complément à 2 et le complément vrai est le complément à 1. On peut aisément passer de l'un à l'autre en faisant : $\boxed{CV = CR + 1}$.

f) La représentation modulo N

Modulo N : c'est le reste de la division entière d'un nombre par N.

2. *Les changements de bases.*

Conventions :

BS : base source
BC : base cible
n : nbre de rangs
k : nbre de rangs à obtenir pour la source

Les méthodes à retenir !!!!

	B → 10	10 → B
Entiers	Si on prend un nombre XYZ dans la base B, on a le calcul suivant à faire : 0*B + X = X X*B + Y = T T*B + Z = $(\text{nbre})_{10}$ Sens de lecture : aucun (il suffit de lire le résultat final)!	On divise par B et on prend le reste de la division comme nbre dans la base 10 et on répète l'opération. Attention : sens de lecture du bas vers le haut pour les restes de divisions donnant le résultat !
Fractionnaires	Calcul du nbre de chiffres significatifs On multiplie le nbre fractionnaire par B^N de façon à retrouver un entier. On transforme cet entier dans la base 10 (voir méthode ci-dessus). On divise le nombre obtenu par B^N et on prend le résultat avec le nombre de chiffre significatifs *k*. Sens de lecture normal (de haut en bas)!	Calcul du nbre de chiffres significatifs On multiplie par B, on prend la partie entière du nombre, elle donne le premier chiffre de la base 10. On refait l'opération avec la partie fractionnaire restante autant de fois qu'il est nécessaire pour atteindre le nombre de chiffres significatifs voulus. Sens de lecture normal (de haut en bas) !

Pour les nombres fractionnaires : tableau de conversion pour trouver le nombre de chiffres significatifs à utiliser.

B	2	8	16	
B → 10	0,301	0,903	1,204	$k = n.\log_{10} BS$
10 → B	3,322	1,107	0,830	$k = n.\dfrac{1}{\log_{10} BC}$

3. *L'arithmétique binaire.*

a) L'addition binaire

Bit A	Bit B	Somme	Report
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

b) La soustraction binaire

Bit A	Bit B	Différence	Emprunt
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

La soustraction binaire est inspirée du système décimal.

c) La multiplication binaire

Ex : $11011 * 101 = 11011*1*2^2 + 11011*0*2^1 + 11011*1*2^0$

Chapitre 2 : l'algèbre booléenne.

1. Définitions

Variable binaire : variable qui prend les valeurs 1 ou 0.
Fonction booléenne : fonction dont l'ensemble de variation est {0,1}. (1=vrai, 0=faux).

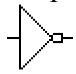
2. Les fonctions

a) La fonction non

C'est la négation.

x	f(x)
0	1
1	0

Et qu'on peut schématiser par la porte :

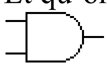


b) La fonction ET

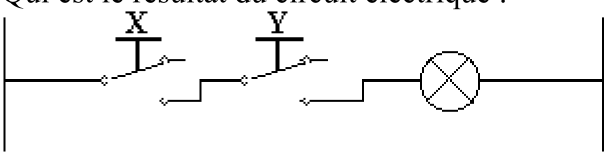
On peut la représenter par l'opérateur de multiplication. f(x,y) = x.y.

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Et qu'on peut schématiser par la porte :



Qui est le résultat du circuit électrique :

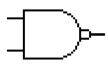


c) La fonction NON-ET

On peut la représenter par f(x,y) = $\overline{x.y}$

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Et qu'on peut schématiser par la porte :



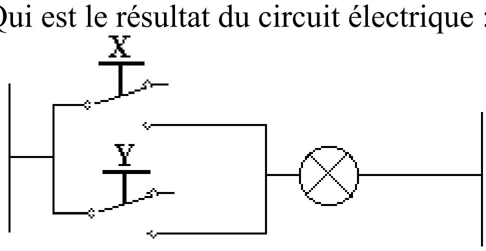
d) La fonction OU

On peut la représenter par l'opérateur d'addition. f(x,y) = x+y.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Et qu'on peut schématiser par la porte :

Qui est le résultat du circuit électrique :

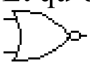


e) La fonction NON-OU

On peut la représenter par f(x,y) = $\overline{x+y}$.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Et qu'on peut schématiser par la porte :

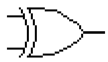


f) La fonction OU EXCLUSIF

On peut la représenter par f(x,y) = x⊕y.

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Et qu'on peut schématiser par la porte :

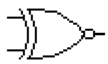


g) La fonction NON OU EXCLUSIF

On peut la représenter par f(x,y) = $\overline{x \oplus y}$.

x	y	F(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Et qu'on peut schématiser par la porte :



3. *Représentation des fonctions booléennes*

a) Par table de vérité

Cela consiste juste à établir un lien entre les variables d'entrées et la fonction de sortie. Lorsque la variable d'entrée est à 1, on doit la retrouver telle quelle à la sortie, si elle est à 0, on doit retrouver sa négation à la sortie. a désigne l'expression vraie pour la variable a et $\overline{a}$ représente l'inverse de a (ou non a). Prenons un exemple d'un tableau à 3 entrées (et donc 2^3=8 sorties) :

a	b	c	Sortie =f(a,b,c)	PC	Numéro lié à la sortie
0	0	0	1	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	a_0
0	0	1	0	$\overline{a}\overline{b}.c$	a_1
0	1	0	0	$\overline{a}.b.\overline{c}$	a_2
0	1	1	1	$\overline{a}.b.c$	a_3
1	0	0	0	$a\overline{b}\overline{c}$	a_4
1	0	1	1	$a.\overline{b}.c$	a_5
1	1	0	1	$a.b.\overline{c}$	a_6
1	1	1	0	$a.b.c$	a_7

On parle de sortie lorsque de variables d'entrées on retire des résultats sous forme booléenne, c'est à dire vrai ou faux lors d'un parcourt dans un circuit (C'est le résultat de la fonction)

b) Par équation SDPC (=Somme De Produits Canoniques)

1) Fonctions à variables

On peut représenter une fonction par une somme des produits canoniques en donnant par ligne le produit de la sortie avec le produit canonique complet correspondant. Pour la table de vérité (plus haut), on a :

$a_0.\overline{a}\overline{b}\overline{c} + a_1.\overline{a}\overline{b}.c + a_2.\overline{a}.b.\overline{c} + a_3.\overline{a}.b.c + a_4.a\overline{b}\overline{c} + a_5.a\overline{b}.c + a_6.a.b.\overline{c} + a_7.a.b.c$

pour les sorties a_1, a_2, a_4, a_7 les sorties sont à 0. On peut donc simplifier le PC par :

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{a}.b.c+a\overline{b}.c+a.b.\overline{c}$

2) Postulats et théorèmes de l'algèbre booléenne.

Les postulats :

Postulat 2 : à chaque opérateur est associé un élément neutre.

$\boxed{x+0=x}$

$\boxed{x.1=x}$

Postulat 3 : commutativité des opérateurs + et *.

$\boxed{x+y=y+x}$

$\boxed{x.y=y.x}$

Postulat 4 : les opérateurs + et * sont mutuellement distributifs dans les 2 sens.

$\boxed{x+(y.z)=(x+y).(x+z)}$

$\boxed{x.(y+z)=(x.y)+(x.z)}$

Postulat 5 : Pour toute variable x, il existe un complément de x noté $\overline{x}$ tel que :

$\boxed{(x+\overline{x})=1}$

$\boxed{(x\overline{x})=0}$

Les théorèmes :

Th 4 : loi de 0 et 1.

$\boxed{(x+1)=1}$

$\boxed{(x*0)=0}$

Th 5 : loi d'impotence

$\boxed{(x+x)=x}$

$\boxed{(x.x)=x}$

Th 6 : première loi d'absorption

$\boxed{x+(x.y)=x}$

$\boxed{x.(x+y)=x}$

Th 7 : deuxième loi d'absorption

$\boxed{x+(\overline{x}.y)=x+y}$

$\boxed{x.(\overline{x}+y)=x.y}$

Th 10 : loi d'involution

$\boxed{\overline{\overline{x}}=x}$

Th 11 : les opérateurs + et * sont associatifs

$\boxed{(x+y)+z=x+(y+z)}$

$\boxed{(x.y).z=x.(y.z)}$

Th 12 : lois de De Morgan

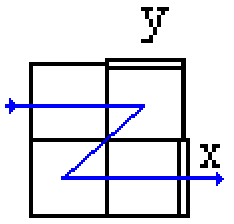
$\boxed{\overline{x+y}=\overline{x}.\overline{y}}$

$\boxed{\overline{x.y}=\overline{x}+\overline{y}}$

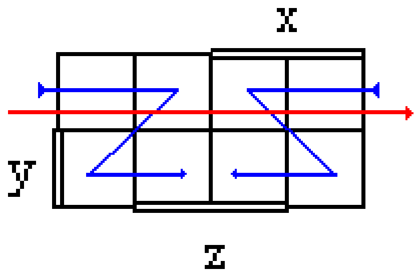
Attention : OU EXCLUSIF

$\boxed{x\oplus y=\overline{x}.y+x.\overline{y}}$

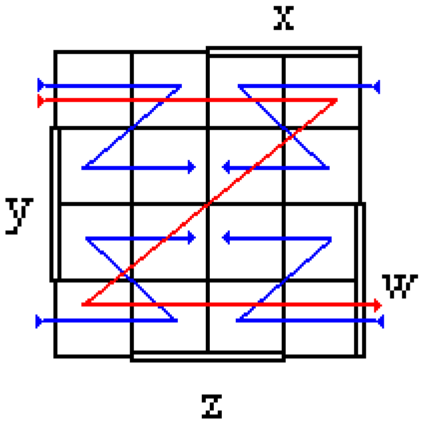
c) Par table de Karnough



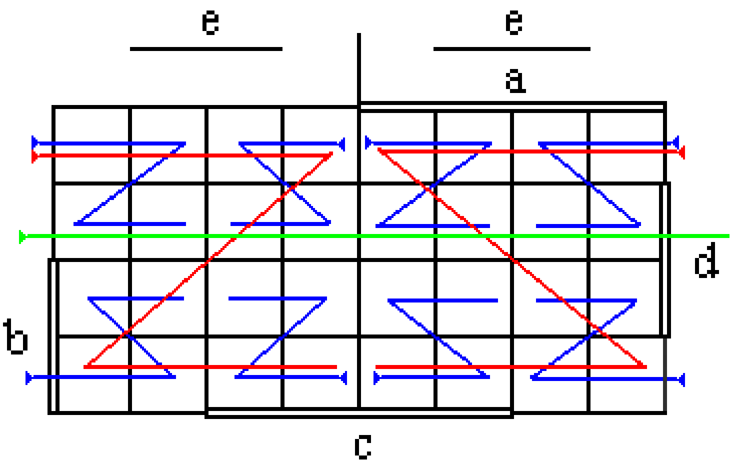
2 entrées :
Grille carrée. On commence donc en bas à droite pour le bit de poids fort et on tourne dans le sens anti-horlogique. On va de P_0 à P_3 en suivant la flèche bleue pour la représentation des sorties sur les différents produits canoniques.



3 entrées :
Grille rectangulaire. On commence donc en haut à droite pour le bit de poids fort et on tourne dans le sens anti-horlogique. On va de P_0 à P_7 en suivant la flèche bleue pour la représentation des sorties sur les différents produits canoniques et en suivant la flèche rouge.



4 entrées :
Grille rectangulaire. On commence donc en haut à droite pour le bit de poids fort et on tourne dans le sens anti-horlogique. On va de P_0 à P_{15} en suivant la flèche bleue pour la représentation des sorties sur les différents produits canoniques et en suivant la flèche rouge.



Grille carrée. On commence donc en haut à droite pour le bit de poids fort et on tourne dans le sens anti-horlogique. On va de P_0 à P_{31} en suivant les flèches bleues pour la représentation des sorties sur les différents produits canoniques et en suivant les flèches rouges dans le sens principal de la flèche verte.

5 entrées :
Une table de Karnough est remplie comme indiqué ci-dessus en fonction de la table de vérité. Pour simplifier l'équation à partir d'une grille,

1) Rechercher les implicants premiers (IP) qui sont les groupes les plus grands possibles.
2) Distinguer les IPE (IP essentiels) et IPNE (IP non essentiels). Un IPE comprend au moins 1 produit canonique que l'on ne retrouve pas dans aucun autre IP.
3) L'équation finale se compose :
    a) de tous les IPE
    b) d'une combinaison des IPNE (pas nécessairement de tous)

On applique les tables de Karnough dans les exercices de logique séquentielle et combinatoire. (voir exercices)

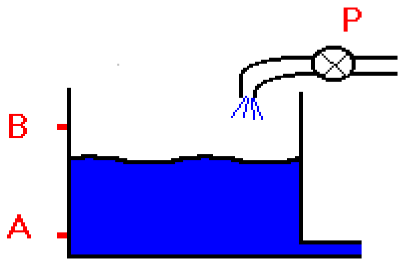
Chapitre 3 : La logique combinatoire

Utilisation des tables de Karnough pour résoudre des équations logiques pour lesquelles une configuration des variables d'entrée donnent une et une seule configuration des variables de sortie.
Ex : le décodeur 7 segments et transcodage.
(voir exercices)

Chapitre 4 : logique séquentielle

Servons-nous de l'exercice « château d'eau » pour donner une méthode de résolution standard à tous les exercices.

Enoncé :



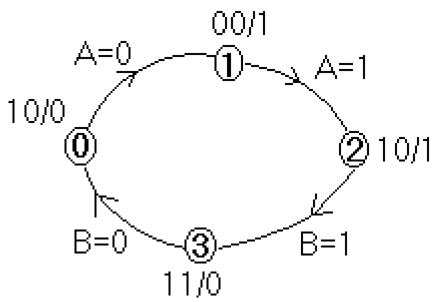
A : capteur de niveau bas.
B : capteur de niveau haut
P : pompe

Quand l'eau passe en dessous du capteur de niveau bas, la pompe remplit le château d'eau jusqu'à ce que l'eau repasse au dessus du capteur de niveau haut.
Sur un capteur : si présence d'eau, état=1, si absence d'eau, état=0.
A la pompe : la pompe la pompe est allumée, état =1, si la pompe n'est pas allumée, état=0.

Méthode de synthèse.

1ère étape : graphe des séquences (Entrées/Sorties)

- On établit une phase initiale.
- On distingue les phases stables des phases instables (l'instabilité est propre aux sorties).
  Dès qu'une entrée change de valeur, il faut considérer une nouvelle phase stable.



2ème étape : établissement de la table des phases.

A	B	00	01	10	11	P
⓪		1		⓪		0
①		①		2		1
②				②	3	1
③				0	③	0

Les phases stables sont écrites en fonction des entrées et sont entourées. Pour trouver les phases instables, on reste sur la ligne de la phase stable étudiée, on prend la colonne de la phase stable suivante , et on note à l'endroit trouvé le numéro de la phase stable suivante (ce sont les numéros en rouge) en pensant bien que les séquences forment une boucle.
Ces numéros en rouge sont les phases instables. Lorsque les phases stables et instables sont présentes dans le tableau, on dit que la table des phases est complète.

3ème étape : simplification de la table des phases.

- Elimination des phases équivalentes
- Fusion des lignes

A B	00	01	10	11	P
⓪③	1	--	⓪	③	0
①②	①	--	②	3	1

Une règle à retenir : $\boxed{\text{stable>instable>indéterminée}}$.
Phase stable : numéro entouré
Phase instable : numéro simple
Phase indéterminée : case vide.

4ème étape : choix des variables auxiliaires d'entrée.

Les variables auxiliaires d'entrée sont prises identiques aux sorties.

p	A B	00		01		10		11		P
0	⓪③	1	1 / P_0	--	P_1	⓪	0 / P_2	③	0 / P_3	0
1	①②	①	1 / P_4	--	P_5	②	1 / P_6	3	0 / P_7	1

Les numéros en rouge sont les bits à mettre dans la table de Karnough en fonction de P_0 jusque P_7 (qui sont les positions données par les variables d'entrée)

Exécutons Karnough :

Pour les tables de Karnough, il faut faire des groupes de bits égaux à 1 de 1, 2, 4, 8, 16, 32 bits. Pour les phases indéterminés, on peut avoir n'importe quelle valeur binaire 0 ou 1 et ainsi s'arranger pour trouver une résolution plus simple.

		p	p	
	1	-	-	1
A	0	0	0	1
		B	B	

On peut faire les différents groupes P_1P_4 et P_4P_5 si on ne change pas les phases indéterminées.

Dans ce cas, on a : P_1P_4 correspondant à $\boxed{\overline{A}.\overline{B}}$

P_4P_5 correspondant à $\boxed{p.\overline{B}}$

Ce qui donne comme équation finale : $\boxed{P=\overline{A}.\overline{B}+p.\overline{B}}$ ou en remaniant un peu : $\boxed{P=\overline{B}.(\overline{A}+p)}$.

Résumé de logique : ... *3*
Chapitre I : Etude du système binaire. ... *3*
1. Les nombres et leur représentation. ... **3**
a) Définitions. ... 3
b) Numération de position ... 3
c) Les nombres et les ordinateurs ... 3
d) Les nombres fractionnaires ... 3
e) Les nombres négatifs ... 4
f) La représentation modulo N ... 4
2. Les changements de bases. ... **4**
3. L'arithmétique binaire. ... **5**
a) L'addition binaire ... 5
b) La soustraction binaire ... 5
c) La multiplication binaire ... 5
Chapitre 2 : l'algèbre booléenne. ... *6*
1. Définitions ... **6**
2. Les fonctions ... **6**
a) La fonction non ... 6
b) La fonction ET ... 6
c) La fonction NON-ET ... 6
d) La fonction OU ... 6
e) La fonction NON-OU ... 7
f) La fonction OU EXCLUSIF ... 7
g) La fonction NON OU EXCLUSIF ... 7
3. Représentation des fonctions booléennes ... **7**
a) Par table de vérité ... 7
b) Par équation SDPC (=Somme De Produits Canoniques) ... 8
1) Fonctions à variables ... 8
2) Postulats et théorèmes de l'algèbre booléenne. ... 8
c) Par table de Karnough ... 9
Chapitre 3 : La logique combinatoire ... *11*
Chapitre 4 : logique séquentielle ... *12*
Méthode de synthèse. ... **12**