Résumé du cours sur les intégrales

1. définition

si F'(x) = f(x) sur un intervalle I
alors F(x) est appelée une primitive de f sur I
I est l'intervalle où la fonction existe.

exemple : $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ on dérive f(x)

$(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})'=\frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ on recherche la fonction qui, une fois intégrée, redonne $\sqrt{x}$

$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

si on intègre F(x), on retrouve f(x).
I = R^+ : La fonction $\sqrt{x}$ n'est possible que sur les réels positifs.

si F(x) est une primitive de f(x)
alors F(x) + constante (c) est aussi une primitive de f(x)
en effet (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)

2. Propriétés du calcul sur les intégrales

2.1. Somme :

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

L'intégrale de la somme de deux fonctions est égale à la somme des intégrales de ces deux fonctions.

exemple :

$$\int x^2+x\,dx=\int x^2\,dx+\int x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$$

2.2. Multiple :

$$\int c\times f(x)dx=c\times\int f(x)dx$$

L'intégrale du produit d'une constante et d'une fonction est égale au produit de cette constante avec l'intégrale de la fonction.

Exemple :

$$\int 5 \times x\,dx = 5 \times \int x\,dx = \frac{5}{2}x^2 + c$$

2.3.Composée de fonctions :

$$\int h'(g(x))\,g'(x)\,dx = h(g(x)) + c$$

pour explication voir substitution

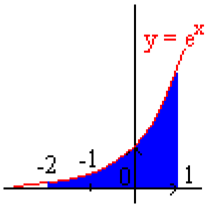
3. Principales dérivées et leurs intégrales

Ceci n'est qu'une présentation des principales dérivées et leurs intégrales. Le tableau n'est pas complet. Il est simplement là pour insister sur la relation qui relie les dérivées et les intégrales. Pour un tableau complet, reportez vous au tableau du cours.

Formules de dérivation	*Formules de primitivation*
c' = 0	$\int 0\,dx = c$
x' = 1	$\int 1\,dx = x + c$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$ Si $p \neq -1$
(ln x)' = $\frac{1}{x}$	$\int x^p\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$ Si $p = -1$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
(sin x)' = cos x	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$
(cos x)' = - sin x	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$
$\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \int (1 + \tan^2)\,dx = \tan(x) + c$
Arcsin x = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
Arctan x = $\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

4. Intégrale finie

Un intégrale peut être utilisée pour calculer l'aire sous une courbe. C'est ce qu'on appelle une intégrale finie.
La méthode à suivre est simple :



Le diagramme montre le graphique de la fonction e^x. Il faut calculer l'aire sous la courbe de -2 à 1. ces deux chiffres sont appelés les bornes d'intégration.

$$\int_{-2}^{1} e^x\,dx = [e^x]_{-2}^{1} = e^1 - e^{-2}$$

5. Méthode d'intégration par substitution

Elle consiste à remplacer la variable x par une fonction d'une autre variable pour otenir une fonction dont les primitives se calculent plus aisément.

$$\int f(x)\,dx$$

On pose x = g(t)

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)).g'(t)\,dt$$

Exemple :

$$I = \int \cos(3x+1)\,dx$$

on pose :
t = 3x + 1
dt = 3 dx $\longrightarrow$ $\frac{dt}{3} = dx$

$$I = \int \cos(t)\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{3}\sin(t) + c = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$$

6. Méthode d'intégration par parties

Elle permet de calculer des primitives qui ne sont pas immédiates

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Pour ceux qui n'arriveraient pas à retenir la formule, le premier membre de la somme est une **intégration** et le deuxième membre est une **dérivation**.

Exemple :

$$\int x\sin(x)\,dx$$

f(x) = x	f'(x) = 1
g'(x) = sin(x)	g(x) = - cos(x)

$$\int x\sin(x)\,dx = x.(-\cos(x)) - \int 1.(-\cos(x))\,dx$$
$$= -x.\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$
$$= -x.\cos(x) + \sin(x) + c$$

7. Factorisation

Elle a pour but de réduire un quotient de deux polynômes en une somme de quotients plus simple à intégrer.

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Pour savoir quel sont les numérateur, il faut y placer un polynôme ayant un degré de moins que celui du dénominateur. Tous les degrés plus faible doivent être également présent dans le numérateur.
Dans les quotients ci-dessus, leurs deux premiers termes de la somme ont leurs dénominateurs de degré 1. Leurs numérateurs sera de degré 0. Par contre le troisième est de degré 2, le numérateur sera de degré 1 avec aussi un terme de degré 0.

Ensuite, on distribue de façon avoir un dénominateurs commun des deux côtés de l'égalité

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x-1)(x+1)}{x^4-1}$$

On simplifie les dénominateurs. On donne des valeurs à x afin de déterminer les 4 inconnues que sont a, b, c et d.

Attention, si un dénominateur présente en carré ou un exposant plus important, tous les degré du dénominateur doivent être représenté dans l'équation

$$\frac{1}{x^3.(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x-2}$$

8. Intégrales récursives

Si une intégrales se répète après plusieurs intégrations, appliquez la méthode suivante :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

si l'on intègre deux fois, cela donne :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

on peut constater que le deuxième terme de la soustraction est l'intégrale que l'on doit calculer. Il suffit alors faire passer ce terme dans le membre de gache de l'équation.

$$2 \times \int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

Il ne reste plus qu'à diviser par deux et l'intégrale est résolue

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2}$$

9. Exercices d'intégration simples

1. $\int x^{17}\,dx$
2. $\int 7\,dx$
3. $\int \frac{4}{t^4}\,dt$
4. $\int (3x^2-4x+7)\,dx$
5. $\int (\sin(u)+\cos(u))\,du$
6. $\int \frac{3}{x}\,dx$
7. $\int (\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$
8. $\int (5\sqrt[3]{v^2}-\frac{2}{3v^2})\,dv$
9. $\int (e^x+3^x)\,dx$
10. $\int (\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{1}{1-x^2})\,dx$
11. $\int \frac{2x}{\cos^2(x^2-1)}\,dx$
12. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8}\,dx$
13. $\int \frac{\sqrt{\ln(v)}}{v}\,dv$
14. $\int x^2\ln(x)\,dx$
15. $\int x\sqrt{(1+2x)}\,dx$

16. $\int x(2+1)^8 dx$

17. $\int \frac{5u}{u^4+3} dx$ cette dernière intégrale est assez difficile.

10.Solutions

1. $\frac{x^{18}}{18}+c$

2. $7x+c$

3. $\frac{-4}{3t^3}+c$

4. x^3-2x^2+7x+c

5. $-\cos(u)+\sin(u)+c$

6. $3\ln(x)+c$

7. $-\sqrt{(x)}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

8. $3v^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3v}+c$

9. $e^x+\frac{3^x}{\ln(x)}+c$

10. $\tan(x)-\arctan(x)+c$

11. $\tan(x^2-1)+c$

12. $\ln(x^2-5X+8)+c$

13. $\frac{1}{2}\ln(v)$

14. $\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+c$

15. $\frac{1}{15}(1+2x)^{\frac{3}{2}}(3x-1)+c$

16. $\frac{1}{18}(2x+1)^{10}(18x-1)+c$

17. $\frac{5\sqrt{(3)}}{6}\arctan(\frac{u^2}{\sqrt{(3)}})+c$

Pour plus d'exercices, voir le fichier nommé Intégrales sur le site.