Mathématique

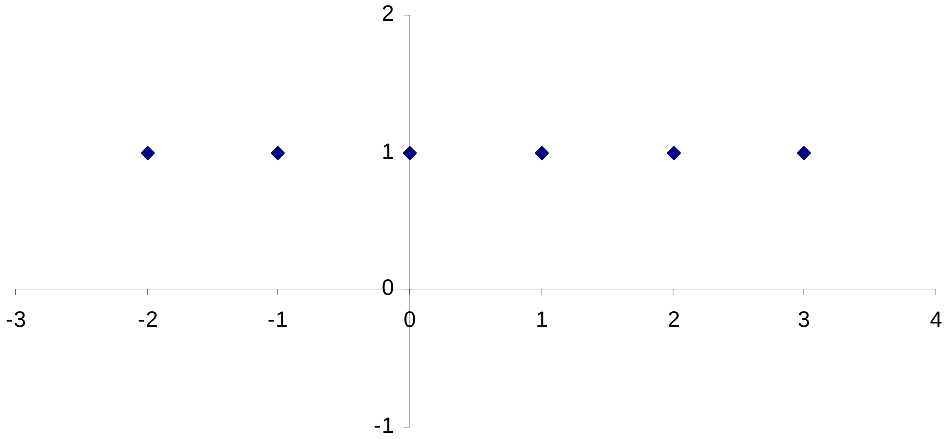
Notes prises au cours de Mr Deschynck
Ces notes n’ont pas été approuvées par le prof, elles ne peuvent donc être utilisées comme source sure, des erreurs faites par l’auteur peuvent s’y trouver,
Ceci n’est juste qu’un support pouvant éventuellement vous aider dans votre compréhension des mathématiques.

Anseel Arnaud 1ére informatique Don Bosco Tournai

Bloc II : Continuité – Dérivation

Exemple 1 :

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



Idée :

f ~ g si x = a (I) f(x) = g(x) + ε(x)

(II) $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Formules de dérivation :

- $(x)' = 1$
- $(c)' = 0$ avec c = constante
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f-g)' = f' - g'$
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$ et $(c.g)' = c.g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$ et $\left(\frac{c}{g}\right)' = \frac{-c.g'}{g^2}$

- $(x^n)' = n.x^{n-1}$
- $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$

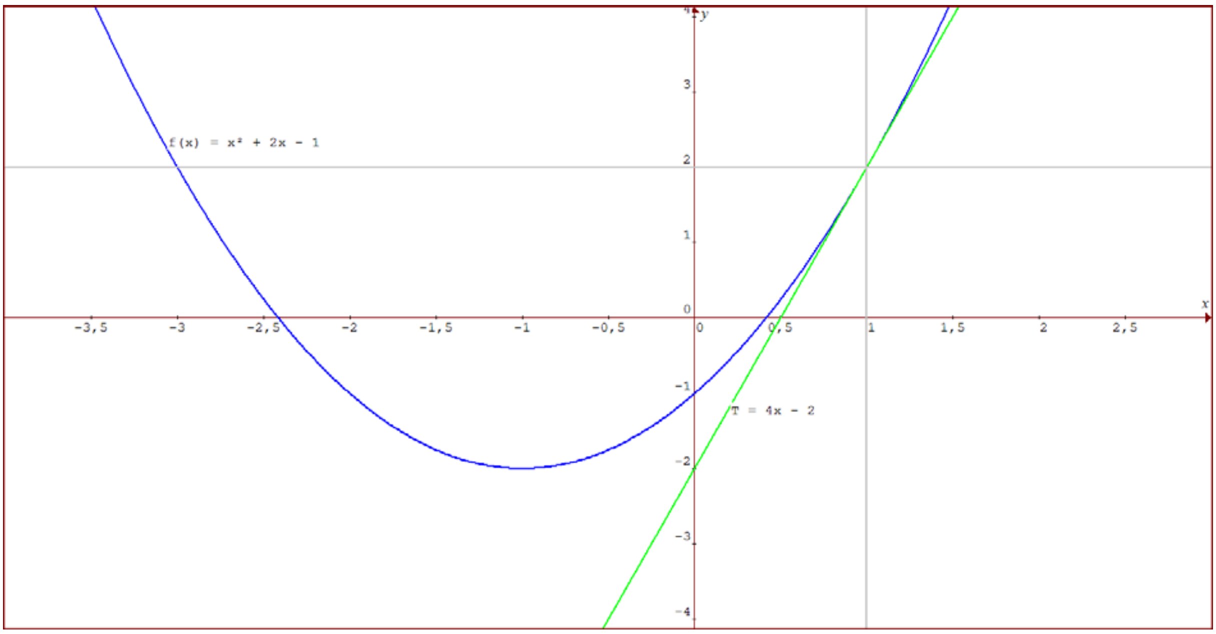
- $(\sin x)' = \cos x$ et $(\sin t)' = t'.\cos t$
- $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\cos t)' = -t'.\sin t$
- $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ et $(tgt)' = \dfrac{t'}{\cos^2 t} = t'.(1+tg^2 t)$
- $(e^x)' = e^x$ et $(e^t)' = t'e^t$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $(\ln t)' = \dfrac{t'}{t}$
- Equation de la tangente à la fonction f en x = a :

$T \equiv y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)$ or équation d'une droite : T ≡ y = mx + p

$\Rightarrow$ Ici : m = $f'(a)$ et p = $f(a) - f'(a)a$

Exemple 2 :

f(x) = x² + 2x – 1



a = 1

f(a) = 2

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(a) = 4$

p = 2 – 4 = - 2

$\Rightarrow \boxed{T \equiv 4x - 2 = y}$

Par l'horizontale :

(I) $\varepsilon(x) = x^2 + 2x - 1 - g(x)$
$= x^2 + 2x - 3$

(II) $\lim\limits_{x \to a} (x^2 + 2x - 3) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} (x - 1)(x + 3) = 0$

Par la tangente :

(I) $\varepsilon(x) = x^2 + 2x - 1 - 4x + 2$
$= x^2 - 2x + 1$
$= (x - 1)^2$

(II) $\lim\limits_{x \to a} (x - 1)^2 = 0$

Exercice : <u>Rechercher une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ par un équivalent tangentiel.</u>

$f(x) = \sqrt{x}$

$a = 1,2$

$f(a) = \sqrt{1,2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{1,2}}$

$\Rightarrow T \equiv y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)$

$$T \equiv \frac{x}{2\sqrt{1,2}} + \left(\sqrt{1,2} - \frac{\sqrt{1,2}}{2\sqrt{1,2}}\right) = y$$

$$T \equiv \frac{x}{2\sqrt{1,2}} + \left(\sqrt{1,2} - \frac{1}{2}\right) = y$$

$$T \equiv \frac{x + \left(\sqrt{1,2} - \frac{1}{2}\right)\left(2\sqrt{1,2}\right)}{2\sqrt{1,2}} = y$$

$$T \equiv \frac{x + 2\sqrt{(1,2)^2} - \frac{2}{2}\sqrt{1,2}}{2\sqrt{1,2}} = y$$

$$T \equiv \frac{x + 2,4 - \sqrt{1,2}}{2\sqrt{1,2}} = y$$

Donc pour $x = 1,2$, $y = 1,1431$

Même raisonnement pour a = 1

<u>Dérivés : Exercices</u>

- $\left(\ln\left(1 - x^2\right)\right)' = \frac{-2x}{1 - x^2}$
- $\left(\ln^2 x\right)' = \frac{2\ln x}{x}$
- $\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x\right)' = \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$
- $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$
- $\left(\arctan e^x\right)' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$
- $\left(\sin \frac{2\pi}{T} t\right)' = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$
- $\left(i_{\max} \cos(\omega t - \varphi)\right)' = -i_{\max}\, \omega \sin(\omega t - \varphi)$
- $\left(E_{\max} \sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)\right)' = \omega E_{\max} \sin(2\omega t - \varphi)$
- $\left(e^{\frac{-t}{\tau}}\left(\sin(\omega t) - 3\cos(\omega t)\right)\right)' = -e^{\frac{-t}{\tau}}\left(\left(3\omega + \frac{1}{\tau}\right)\sin \omega t - \left(\frac{3}{\tau} + \omega\right)\cos \omega t\right)$

ATTENTION

Une introduction aux équations différentielles :

(I) $y = e^{2x} + e^{-2x}$ est une solution de $y'' = 4y$

$$y'' = \left(2e^{2x} - 2e^{-2x}\right)' = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) = 4y$$

$$\Rightarrow VRAI$$

(II) $y = 0{,}5x^2e^x$ est une solution de $y'' - 2y' + y = e^x$

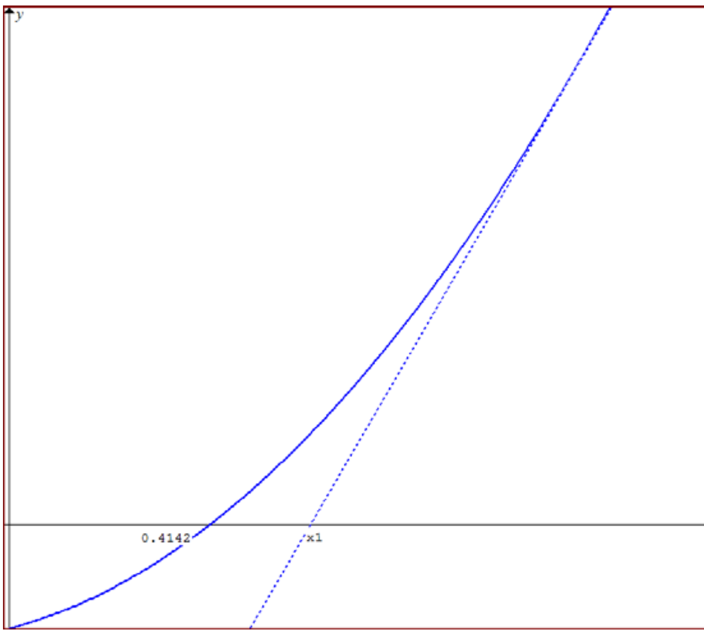
$$y' = xe^x + 0{,}5x^2e^x$$
$$y'' = e^x + xe^x + xe^x + 0{,}5x^2e^x$$

$$e^x = e^x + xe^x + xe^x + 0{,}5x^2e^x - 2xe^x - x^2e^x + 0{,}5x^2e^x$$
$$\Rightarrow e^x = e^x$$

$$\Rightarrow VRAI$$

<u>Les méthodes numériques</u>

- rechercher une racine (x tel que f(x) = 0)
  - l'idée
  - les méthodes (Newton, Newton amélioré et Point fixe)



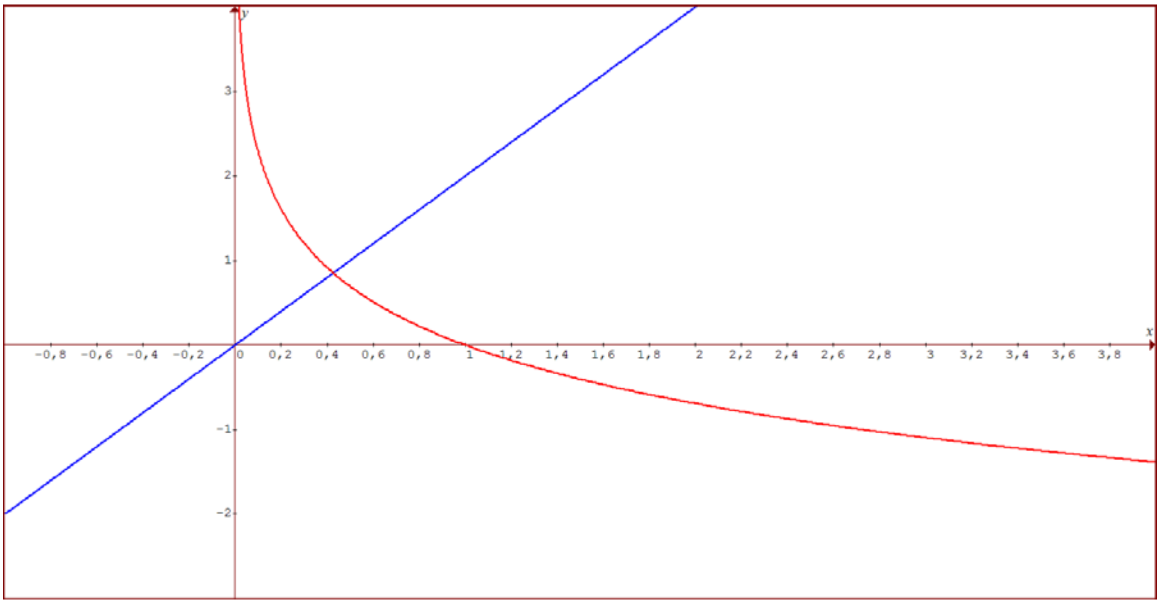
On prend un point relativement proche de la racine recherchée, on trace la tangente a la courbe en ce point. Cette tangente coupe l'axe des 'x' en un point plus proche de la racine. On recommence l'opération a partir du point obtenu.

$$y = f'(a)x + \left(f(a) - f'(a)a\right) \quad \text{avec :} \begin{cases} y = 0 \\ x = x_1 \\ a = x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \boxed{\Rightarrow \text{Formule de Newton}}$$

Exemple : rechercher la racine de $f(x) = 2x + \ln x$ par Newton

1. x_0 est une approximation de la racine (à trouver par le graphique)



2. $x_1 = x_0 - \dfrac{2x_0 + \ln x_0}{2 + \dfrac{1}{x_0}}$

3. Boucler :

#	x_0	x_1	$\lvert x_0 - x_1 \rvert \leq P$
0	0,5	0,4232	Non
1	0,4232	0,426277	Non
2	0,426277	0,426302	OUI

Avec P = 0,001

$\Rightarrow$ La racine sera égale à 0,426302

Formule de Newton amélioré :

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{\delta} \quad \text{ou } \delta = f'(x_0) \text{ fixe}}$$

Exemple : même question que l'exemple précédent mais avec Newton améliorée

1. $x_0 = 0{,}5$
2. $x_1 = x_0 - \dfrac{2x_0 + \ln x_0}{4}$
3. Boucler :

#	x_0	x_1	$\lvert x_0 - x_1 \rvert \leq P$
0	0,5	0,423286	Non
1	0,423286	0,426569	Non
2	0,426569	0,426278	OUI

$\Rightarrow$ La racine sera égale à 0,426278

Le Point Fixe

Rechercher la racine de $f(x) = 2x + \ln x$ par le point fixe

$$x_1 = \phi(x_0) = x_0$$

1. $x_0 = 0{,}5$
2. $x_1 = -\dfrac{\ln x_0}{2}$
3. Boucler :

#	x_0	x_1	$\lvert x_0 - x_1 \rvert \leq P$
0	0,5	0,3465	Non
1	0,3465	0,529936	Non
2	0,529936	0,317499	Non
3	0,317499	0,573639	Non

$\Rightarrow$ Diverge de trop pour être utilisé

Etude de fonctions électriques

- Sur f : domf, imf, racines-signes, asymptotes
- Sur f' : domf, racines-signes, tangente verticale

Etude de $f(\omega) = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$

avec $\omega \in \Re_+^0$ et L,C sont des constantes différentes de 0

1) Sur f :
   a. domf : $\Re_+^0$
   b. imf : $\Re$
   c. racines : $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$
   d. signe :

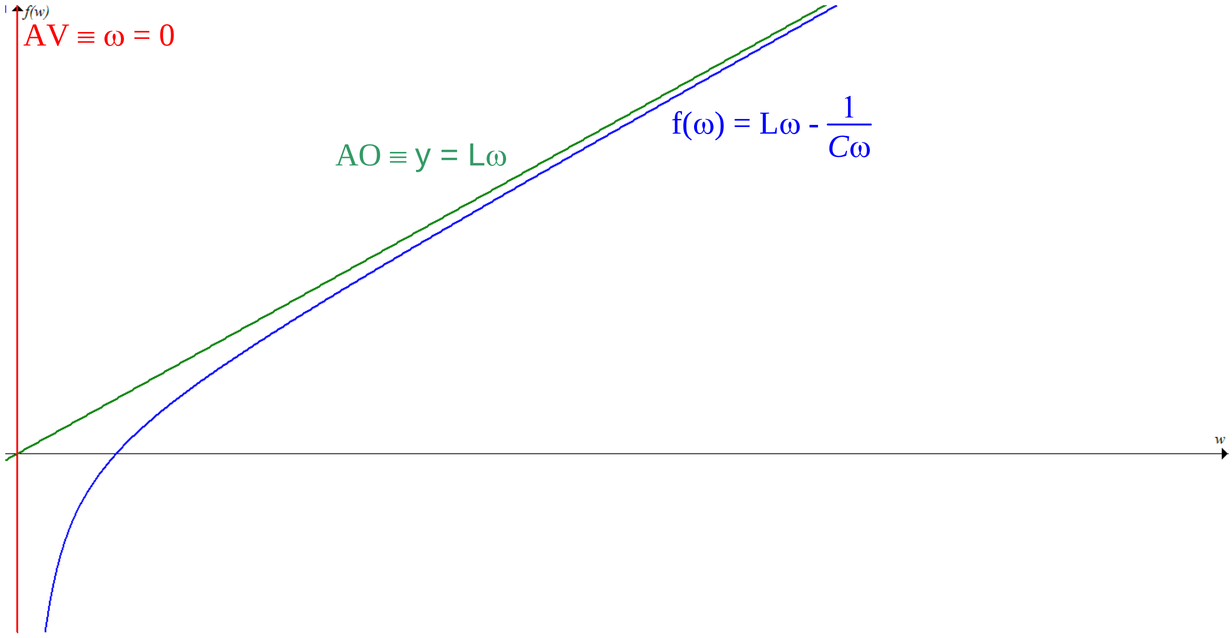
ω	0		$\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$		$+\infty$
$f(\omega)$	$\nexists$	-	0	+	$+\infty$

$\Rightarrow AV \equiv \omega = 0$ et $AO \equiv y = L\omega$

2) Sur f' : $f'(\omega) = L + \dfrac{1}{C\omega^2}$
   a. domf : $\Re_+^0$
   b. racine : La fonction est toujours strictement positive, il n'y a donc aucune racine
   c. signe :

ω	0				$+\infty$
$f'(\omega)$	$\nexists$	+	+	+	+

Tangente verticale en 0



Etude de $f(R) = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$

avec E et r sont des constantes différentes de 0

1) sur f :
   a. domf : $\Re_+$
   b. imf : $\Re_+$
   c. racines : $R = 0$
   d. signe : Toujours positif
   e. asymptotes : $AH \equiv f(R) = 0$

2) sur f' :
   a. calcul de la dérivée :

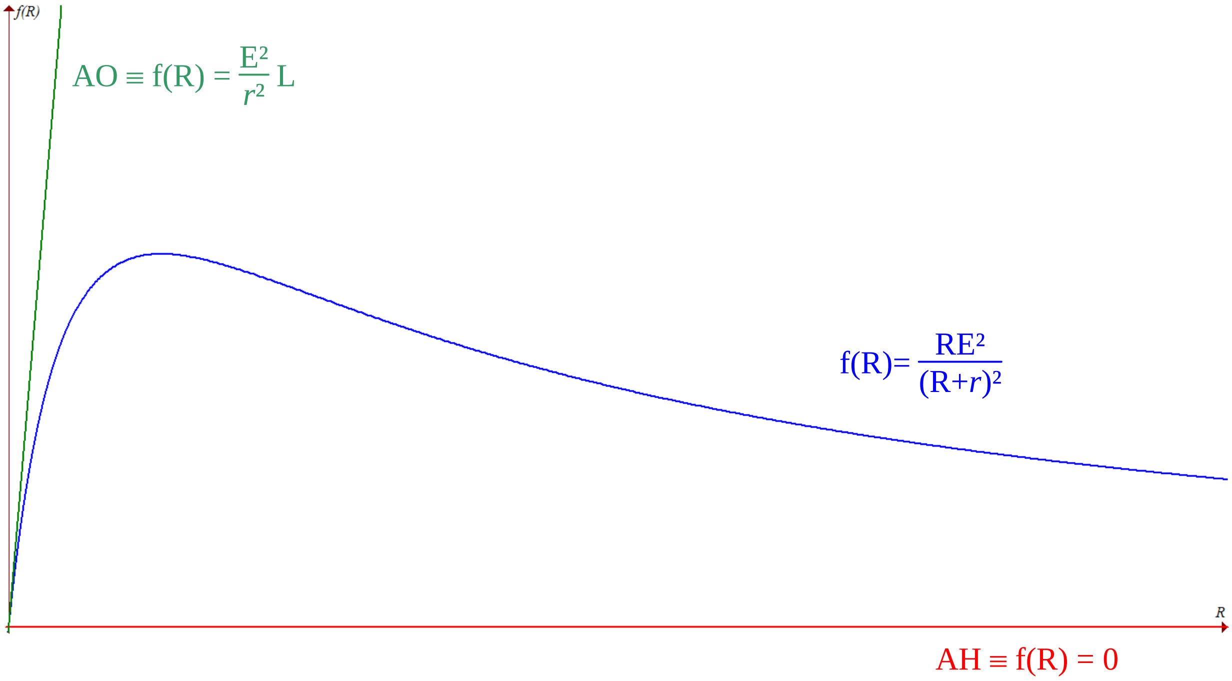
$$f'(R) = \left(\frac{RE^2}{(R+r)^2}\right)' = \frac{E^2(R+r)^2 - RE^2(2R+2r)}{(R+r)^4}$$

$$= E^2\,\frac{(R+r)((R+r)-2R)}{(R+r)^4}$$

$$= E^2\,\frac{r-R}{(R+r)^3}$$

   b. domf' : $\Re$
   c. signe :

R	0^-		r	
f'(R)	$\frac{E^2}{r^2}$	+	0	-



Etude de $f(\omega) = \dfrac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$

avec R et C constants et différents de 0

1) sur f :
   a. domf : $\Re_+$
   b. imf : $\Re_+$
   c. racine : aucune
   d. signe : toujours positif
   e. asymptotes : $AH \equiv f(\omega) = 0$

2) sur f' :
   a. calcul de la dérivée :

$$f'(\omega) = \left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\right)' = \frac{R'\left(\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\right) - R\left(\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}\right)^2}$$

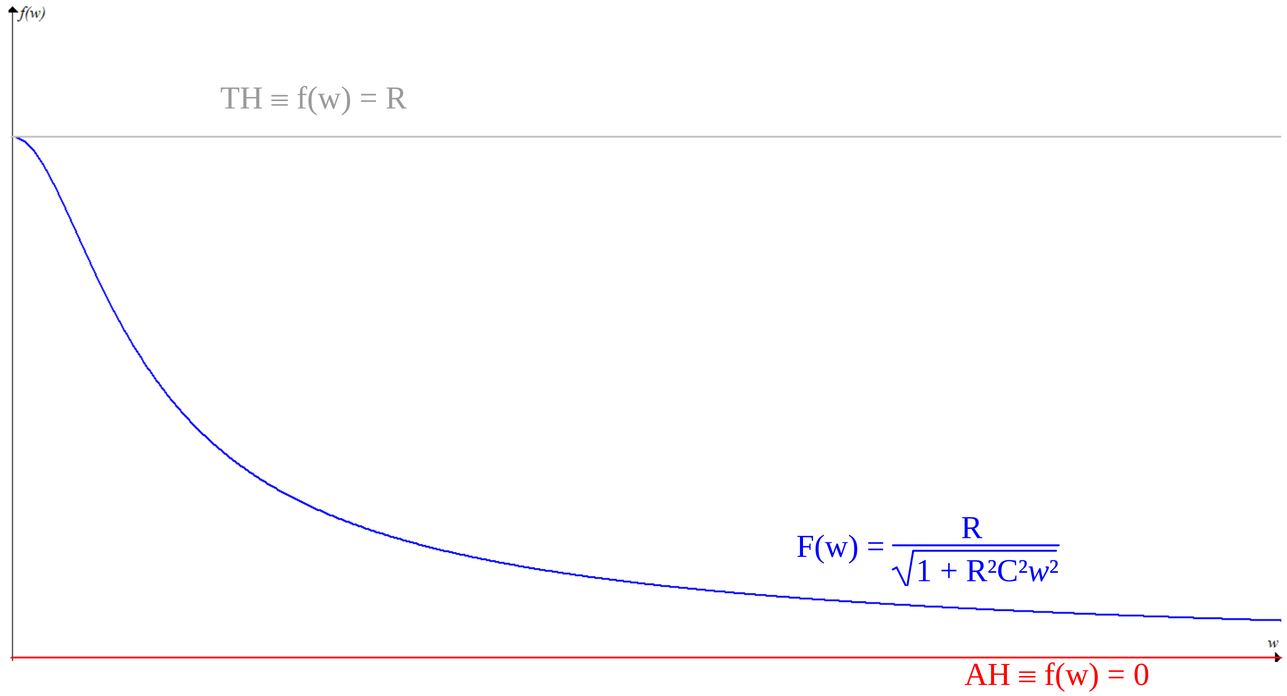
$$= -\frac{R\left(\left(1+R^2C^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1+R^2C^2\omega^2}$$

$$= -\frac{R^3C^2\omega}{\left(1+R^2C^2\omega^2\right)\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

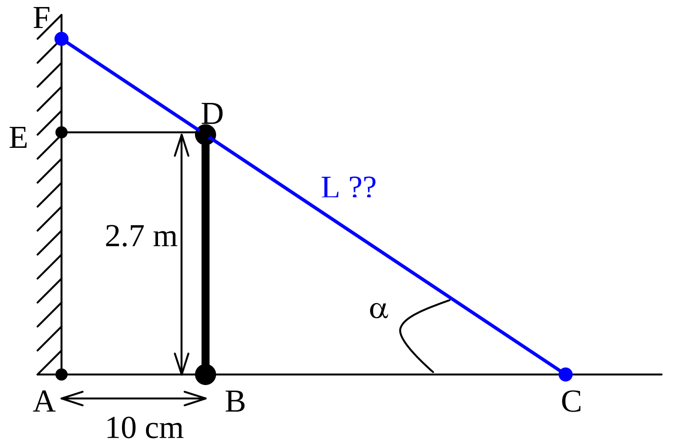
b. signe :

ω	0			
$f(\omega)$	0	-	-	-

Tangente horizontale en f(ω)=R



Problème : (la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction)



Quelle est la longueur minimale que doit avoir une échelle pour poser à la fois sur le mur, la palissade et le sol ?????

<u>Solution :</u>

Première solution :

ΔAFC $\qquad \dfrac{AF}{BD} = \dfrac{FC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$

ΔBCD

ΔEFD

Deuxième solution :

$$f(\alpha) = \frac{2{,}7}{\sin\alpha} + \frac{0{,}1}{\cos\alpha}$$

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \left(\frac{2{,}7}{\sin\alpha}\right)' + \left(\frac{0{,}1}{\cos\alpha}\right)' \\
&= \frac{(2{,}7)'\sin\alpha - 2{,}7(\sin\alpha)'}{(\sin\alpha)^2} + \frac{(0{,}1)'\cos\alpha - 0{,}1(\cos\alpha)'}{(\cos\alpha)^2} \\
&= \frac{-2{,}7\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2} + \frac{0{,}1\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}
\end{aligned}$$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{2{,}7\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2} = \frac{0{,}1\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$$

$$2{,}7\cos^3\alpha = 0{,}1\sin^3\alpha$$

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = 27 \Rightarrow \tan^3\alpha = 27$$

$$\tan\alpha = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\alpha = 71{,}56°$$

$$l_1 = \frac{2,7}{\sin 71,56°} = 2,85 mètres$$

$$l_2 = \frac{0,1}{\cos 71,56°} = 0,31 mètres$$

$$\Rightarrow L = l_1 + l_2 = 2,85 + 0,31 = 3,16 mètres$$

L'accroissement différentiel

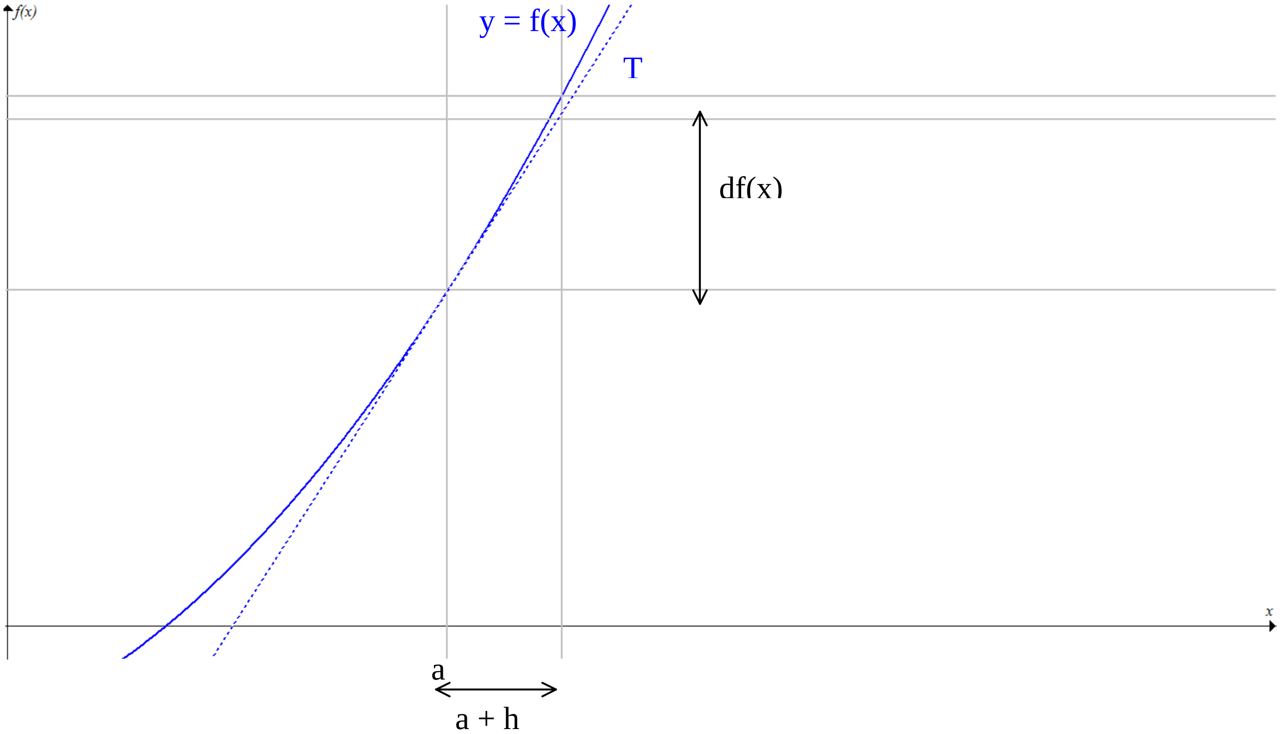
- L'idée : accroissement linéarisé
- Formules
- Applications :
  1. valeurs approchées
  2. vitesse de variation
  3. erreurs

- Formules :

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} df(x) &= f'(x)dx \\ \Delta f(x) &= f'(x)\Delta x \end{aligned}\right\} f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

- Idée :



$$\Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \rightarrow df(x) = f'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h$$

- Applications :

1. $d(\cos^2 x) = -2\cos x \sin x dx$
2. $d(IR) = (I'R + IR')dt$
   $= dIR + IdR$
3. $d\left(\frac{1}{C\omega}\right) = \frac{-d(C\omega)}{C^2\omega^2}$
   $= -\frac{dC\omega + d\omega C}{C^2\omega^2} = -\frac{dC\omega + 2\pi C df}{C^2\omega^2}$

- Valeurs approchées :

1. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$

   $a + h = 1{,}2 \quad \Rightarrow a = 1$ et $h = 0{,}2$

   $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $\Rightarrow \sqrt{1{,}2} \approx \sqrt{1} + 0{,}2\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)$

   $\approx 1 + 0{,}2\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}1$ or $\sqrt{2} = 1{,}095$ donc OK

2. Trouver une valeur approchée de $f(x) = x\ln x$ pour $x = 3$

   $a + h = 3 \quad \Rightarrow a = e = 2{,}71$ et $h = 0{,}3$

   $f'(x) = \ln x + 1$

   $\Rightarrow f(3) = e + 2(0{,}3) = 3{,}3$

3. Trouver ΔZ si $\Delta f = 2Hz$ pour $Z = \frac{1}{C\omega}$

   avec $C = 10\mu H$
   $f = 50Hz$

   $|\Delta Z| = \left|d\left(\frac{1}{2\pi fC}\right)\right| = \left|-\frac{d(2\pi fC)}{4\pi^2 f^2 C^2}\right| = \left|-\frac{df}{2\pi f^2 C}\right| = \left|-\frac{2}{2\pi 50^2(10^{-5})}\right| = 1{,}27\Omega$

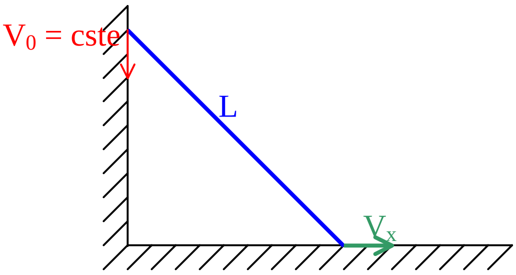
4. Trouver $\Delta \tan\varphi$ pour $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$

avec $\begin{array}{l} L = 100H \\ R = 200\Omega \\ f = 50Hz \end{array}$ et $\begin{array}{l} \Delta f = 2Hz \\ \Delta R = 5\Omega \end{array}$

$$\Delta \tan\varphi = \left| d\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right| = \left| d\left(\frac{2\pi f L}{R}\right)\right| = \left| 2\pi L d\left(\frac{f}{R}\right)\right| = \left| 2\pi L\left(\frac{Rdf - fdR}{R^2}\right)\right|$$

donc $\Delta \tan\varphi = \left| 2\pi(100)\left(\dfrac{200 * 2 - 50 * 5}{200^2}\right)\right| = 2{,}35 \Rightarrow \varphi = 67°$

- Le taux de variation : $\dfrac{\Delta e}{\Delta t} \approx v(t) = \dfrac{de}{dt}$



$$V_x = \frac{dx}{dt}$$
$$V_0 = \frac{dy}{dt}$$

Contrainte : $x^2 + y^2 = L^2 \quad \Rightarrow x^2 = L^2 - y^2$

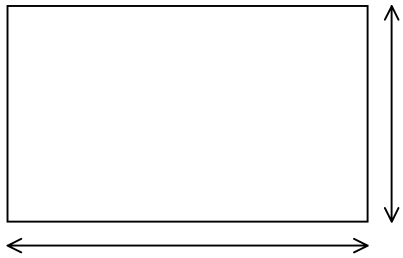
$$x = \sqrt{L^2 - y^2}$$

$$dx = d(\sqrt{L^2 - y^2}) = \frac{d(L^2 - y^2)}{2\sqrt{L^2 - y^2}} = -\frac{ydy}{\sqrt{L^2 y^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}\left(\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow V_x = -\frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} V_0$$

- Le calcul de l'erreur : $\rightarrow absolue : \Delta m$; $\rightarrow relative : \dfrac{\Delta m}{m}$

1.



l = 2 cm ± 0,1 cm

L = 10 cm ± 0,1 cm

$\rightarrow$ S = L*l

$\rightarrow \Delta S = \Delta L * l + L * \Delta l = 0{,}1 * 2 + 0{,}1 * 10 = 1{,}2 cm^2$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{1{,}2}{20} = 0{,}06 = 6\%$$

3. Quelle est la précision en pourcent sur le diamètre pour avoir une précision sur R Comprise entre – 3% et 3%.

$$R = k\frac{l}{D^2}$$

$$\Delta R \approx d(R) = d\left(\frac{kl}{D^2}\right) = kld\left(\frac{1}{D^2}\right) = -kl\frac{dD^2}{D^4} = -2kl\frac{dD}{D^3}$$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \left|\frac{\frac{2kldD}{D^3}}{\frac{kl}{D^2}}\right| = \left|\frac{2dD}{D}\right|$$

$$0{,}03 = \frac{2dD}{D} \Rightarrow \frac{dD}{D} = 1{,}5\%$$

4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec : $l = 0{,}6m \pm 0{,}0001m$; $T = 1{,}55s \pm 0{,}01s$

Calculez : 1) l'imprécision sur g
2) si π varie aussi, combien faudra-t-il de décimales ????

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

$$1)\ \Delta g \approx dg = d\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right) = 4\pi^2\left(\frac{dl}{dT^2}\right) = 4\pi^2\left(\frac{T^2 dl - 2TldT}{T^4}\right)$$

$$= 4\pi\left(\frac{dl}{T^2} - \frac{2ldT}{T^3}\right)$$

$$= \frac{4\pi dl}{T^2} - \frac{8\pi ldT}{T^3}$$

$$\left|\frac{dg}{g}\right| = \left|\frac{dl}{l} - \frac{2dT}{T}\right| = \left|\frac{0{,}001}{0{,}6} - \frac{2*0{,}01}{1{,}55}\right| = 0{,}01 = 1\%$$

$$2)\ \Delta g \approx dg = d\left(4\pi^2 \frac{l}{T^2}\right) = 4d\left(\pi^2 \frac{l}{T^2}\right) = 4\left(d\pi^2 \frac{l}{T^2} + \pi^2 d\left(\frac{l}{T^2}\right)\right)$$

$$= 4\left(2\pi d\pi \frac{l}{T^2} + \pi^2 \frac{T^2 dl - l2TdT}{T^4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2\pi ld\pi}{T^2} + \frac{\pi^2 dl}{T^2} - \frac{2\pi^2 ldT}{T^3}\right)$$

$$= \frac{8\pi ld\pi}{T^2} + \frac{4\pi^2 dl}{T^2} - \frac{8\pi^2 ldT}{T^3}$$

$$\left|\frac{dg}{g}\right| = \left|\frac{2d\pi}{\pi}\right| + \left|\frac{dl}{l}\right| - \left|\frac{2dT}{T}\right| \Rightarrow \text{ il faut prendre 4 décimales.}$$

Taylor – Mac Laurin

- Equivalent local
- Formules
- 1) développer une fonction
  2) évaluation de l'erreur = reste
  3) algorithme « meilleure approximation successive »

- Formules :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + ...$$

⇒ Formule de Taylor

$$\Rightarrow$$

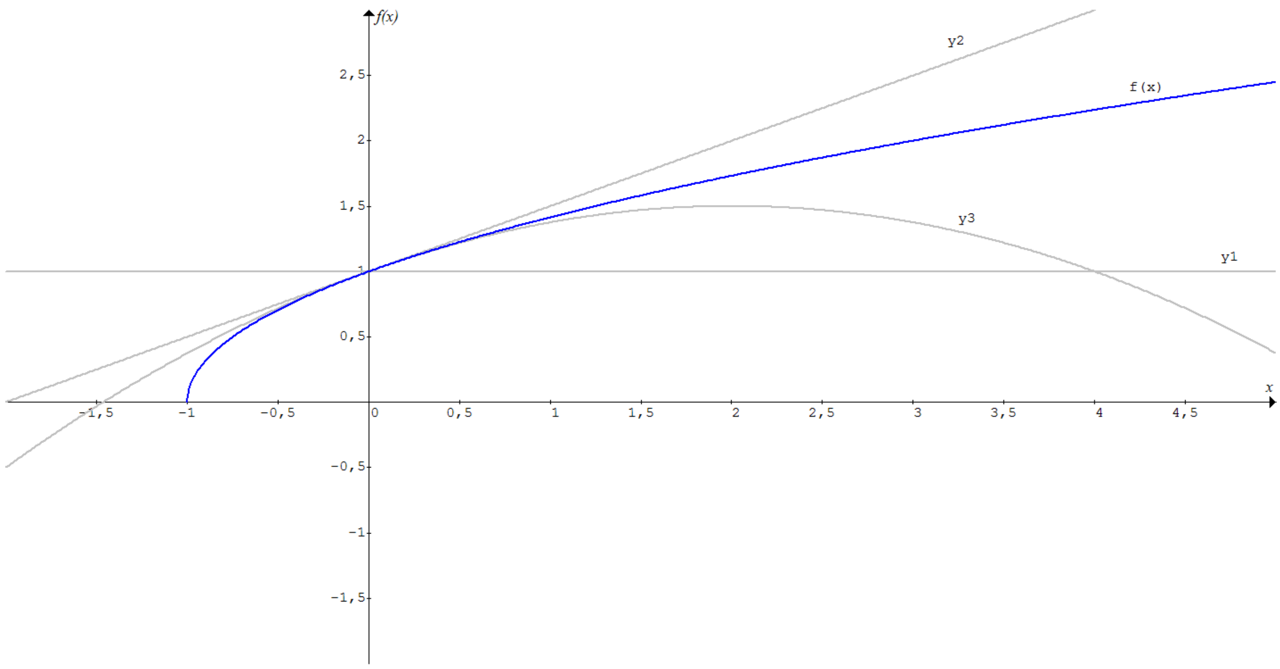
$$erreur = Reste \approx \underset{a-h \le x \le a+h}{MAX} \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right|$$

- Exemple : $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 1 + \frac{x}{2}$$

$$y_3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}$$



- Développer sinx autour de a = 0

$f(x) = \sin x$
$a = 0$
$h = x$

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	sin x	0	0
1	cos x	x	x
2	- sin x	0	x
3	- cos x	$\frac{-x^3}{6}$	$x-\frac{x^3}{6}$
4	sin x	0	$x-\frac{x^3}{6}$
5	cos x	$\frac{x^5}{120}$	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$
…..	…….	……..	……….

$$\text{Ccl : } \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Formule de Mac Laurin : idem Taylor mai avec : a = 0 et h = x = abscisse
- Exercices :

1) Evaluer $e^{0,9}$ à 10^{-4} près

$f(x) = e^x$
$a = 1$
$h = -0{,}1$
$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''a$$

$$\Rightarrow f(a+h) = e - 0{,}1e + \frac{(-0{,}1)^2 e}{2!} + \frac{(-0{,}1)^3 e}{3!} = 2{,}459532$$

or valeur exacte de $e^{0,9} = 2{,}4596031$ dc OK

Formule générique : $e^x \approx e\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$

2) Développer cos x autour de $\dfrac{\pi}{2}$

$f(x) = \cos x$

$a = \dfrac{\pi}{2}$

$h = x = -0.08$

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	cos x	0	0
1	- sin x	- x	0.08
2	- cos x	0	0.08
3	sin x	$\dfrac{x^3}{3!}$	0.079914
4	cos x	0	0.079914
5	- sin x	$-\dfrac{x^5}{5!}$	………..
6	- cos x	0	………..
7	sin x	$\dfrac{x^7}{7!}$	………..
8	cos x	0	………..
9	- sin x	$-\dfrac{x^9}{9!}$	………..

$$\Rightarrow \cos x \approx 0 - h + 0 - \frac{h^3}{3!} + 0 - \frac{h^5}{5!} + 0 + ... + (-1)^{n+1}\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Evaluer cos 1,5 à 10^{-5} près :

$$\cos x = 0{,}08 + \frac{(-0{,}08)^3}{6} + \frac{(-0{,}08)^5}{120} = 0{,}07991468397$$

3) développer $\ln(1+x)$ autour de 1 et évaluer ln 1,2 à 10^{-6} près

$f(x) = \ln x$

$a = 1$

$h = 0{,}2$

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	ln x	0	0
1	x^{-1}	x	x
2	$- x^{-2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$x-\frac{x^2}{2}$
3	$2 x^{-3}$	$\frac{2x^3}{3!}$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}$
4	$- 6 x^{-4}$	$-\frac{6x^4}{4!}$	…………….
5	$24 x^{-5}$	$\frac{24x^2}{5!}$	…………….

$$\Rightarrow \ln(1+x) \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) \approx 0{,}2-\frac{0{,}2^2}{2}+\frac{0{,}2^3}{3}-\frac{0{,}2^4}{4}+\frac{0{,}2^5}{5}-\frac{0{,}2^6}{6} \approx 0{,}18232$$

4) Justifiez : $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	$x^{\frac{1}{3}}$	1	1
1	$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{x}{3}$	$1+\frac{x}{3}$
2	$-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$	$-\frac{x^2}{9}$	$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}$

VRAI

Rechercher le terme en x^3 : $f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$

$$T_3=\frac{10}{27}\frac{x^3}{3!}=\frac{5x^3}{81}$$

- Reste de Taylor : $\text{Reste} \approx \underset{a-h \le x \le a+h}{Max} \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right|$
- Développer $f(x) = \frac{1}{x}$ autour de a = 2, estimer l'erreur de troncature ainsi que combien de termes sont nécessaires pour une erreur de l'ordre de 10^{-8}

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	x^{-1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$- x^{-2}$	$-\frac{x}{2^2}$	$\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2}$
2	$2 x^{-3}$	……..	………
3	$-6 x^{-4}$	……..	………
4	$24 x^{-5}$	……..	………
5	$120 x^{-6}$	……..	………

$$\frac{1}{x} \approx S_n \left((-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} \right)$$

$$\text{Reste } \approx \underset{a-h \le x \le a+h}{Max} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \right| = \underset{a-h \le x \le a+h}{Max} \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\frac{1}{2{,}1} \approx \frac{1}{2} \approx 0{,}475 \approx 0{,}47625 \approx 0{,}4761875$$

Algorithmes

- Les meilleures approximations successives
- Jeux d'instruction :
    1. A $\rightarrow$ B (affectations)
    2. structures de contrôle : Pour….. ; si…..alors….sinon ; tant que…..,jusqu'à ce que …
    3. condition logique d'arrêt

- exemple 1

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^5}{120} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_3 = S_2 + T_3 \Rightarrow S \leftarrow S + T$$

$$T_3 = T_2 \times \frac{x}{3}$$

$$T_4 = T_3 \times \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow T \leftarrow T \times \frac{x}{i}$$

Lire x, P
$i \leftarrow 0$
$T \leftarrow 1$
$S \leftarrow 1$

Tant que : $Abs(T) > P$
$i \leftarrow i + 1$
Faire : $T \leftarrow T \times \frac{x}{i}$
$S \leftarrow S + T$

Ecrire S

- Exemple 2

$$\cos x \approx \sum_n \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$i \leftarrow 0$
$T \leftarrow 1$
$S \leftarrow 1$

Tant que $Abs(T) > P$

$i \leftarrow i+2$

Faire : $T \leftarrow -T \times \dfrac{x^2}{(i-1)i}$

$S \leftarrow S+T$

Afficher S

- Exemple 3

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + ...$$

$i \leftarrow 0$

$T \leftarrow x$

$S \leftarrow x$

Tant que : $Abs(T) > P$

$i \leftarrow i+2$

Faire : $T \leftarrow -T \times x^2 \times \dfrac{i-2}{i}$

$S \leftarrow S+T$

Afficher S

- Exercice :

Développer en série complète de x, la fonction $f(x) = (1+x)^n$
Ecrire un algorithme d'évaluation de f

$f(x) = (1+x)^n \approx x^n$

$a = 1$

$h = x$

$f'(x) = nx^{x-1}$

i	$f^{(i)}(x)$	Ti	Si
0	e^x	1	1
1	n e^{n-1}	n x	1+nx
2	n (n-1) e^{n-2}	$n(n-1)\dfrac{x^2}{2}$	$1+nx+n(n-1)\dfrac{x^2}{2}$
3	n(n-1)(n-2) e^{n-3}	....	....

$$\Rightarrow f(x) \approx 1 + nx + n(n-x)\frac{x^2}{2} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + ...$$

$i \leftarrow 0$
$T \leftarrow 1$
$S \leftarrow 1$

Tant que (i <n)

$i \rightarrow i+1$
Faire : $T \leftarrow T \times x \times (n-i+1)/i$
$S \leftarrow S + T$

Afficher S

Fin du bloc 2
Bonne interro a tous