Cours de logique.

Notes prises au cours de Mr Wilfart

Ces notes n’ont pas été approuvées par le prof, elles ne peuvent donc être utilisées comme source sûre, des erreurs faites par l’auteur peuvent s’y trouver.
Ceci n’est qu’un support pouvant éventuellement vous aider dans votre compréhension de la logique.

Table des matières

Logique

1. Etude du système binaire.

1.1 Les nombres et leur représentation

a) Définition

Système	base	Chiffres
décimal	10	0 →9
octal	8	0 →7
binaire	2	0 ; 1
hexadécimal	16	0→9 ; A → F

Remarque : dans le système hexadécimal les lettres peuvent être en majuscule ou en minuscule.

b) Numération de position

210 →rangs
192

1*100 9*10 2*1
10^2 10^1 10^0
BASE

D'une façon générale nous pouvons étendre ce concept exprimé dans une base B

N10 = dm10n+dn-110n-1+......d3103+.....+d0100

NB= C_nC_n-1....$C_3C_2C_1C_0$

N10 = $C_nB^n+C_n-1B^{n-1}+.... +C_3B^3+....+C_0B^0$

MSD LSD

Dans les ordinateurs : système binaire (Base 2 ; {0 ;1})

1chiffre → digit
Binaire → binary

Binary digit → bit

Nombres de 8 bits → octets, byte
Ex : Disque dur 750GB B majuscule → bytes
Vitesse 100Mb/sec b minuscule → bits
Microprocesseur 32 bits ; 64 bits

c) Les ordinateurs et les nombres

Rangs	6	5	4	3	2	1	0
	1	0	1	0	1	0	1
poids	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	64	32	16	8	4	2	1
N_{10}	1*64+0*32+1*16+0*8+1*4+0*2+1*1						
	$64+16+4+1=(85)_{10}$						

$NB = (C_3+C_2+C_1+C_0)$

$$\boxed{NB = C_3B^3+C_2B^2+C_1B^1+C_0B^0}$$

		0	0	0	0	0	0	0	
		1	1	1	1	1	1	1	
	1	0	0	0	0	0	0	0	$(128)_{10}$ 2^n-1

d) Les nombres fractionnaires

rang	2	1	0		-1	-2
nombre	5	2	1	.	2	5

5*100+2*10+1*1+2*1/10+5*5/100

- Virgule fixe → on détermine à l'avance le nombre de chiffres utilisables pour la partie entière et fractionnaire

  3 bits PE

  0.37|~~2651~~ → perte de précision

  2 bits PF

  ~~17~~|264,0 → chiffre trop grand

- Virgule flottante

  172.645 $\quad$ 0.$\boxed{172645}$*10^3

  Base

  0.172645 E 3

  Mantisse $\quad$ exposant

$(C_2C_1C_0, C_{-1}C_{-2})B$

2 positions vers la droite

$= (C_2B^2+C_1B^1+C_0+B^0+C_{-1}+C_{-2})*B^2+C_0B^2+C_{-1}B^1+C_{-2}B^2)$!!!!!!!!!!!

$= (C_2C_1C_0C_{-1}C_{-2})\ B$

e) Les nombres négatifs

+|125
-|125

Représentation en signe très pratique car rapidité pour savoir qu'un nombre est négatif

On travaille avec le chiffre de poids fort pour représenter le signe.
S=0 → nombre positif
S=B-1 → nombre négatif

Ex : 1|0101011

Nombre négatif

Nombre x

$$\begin{array}{rr} & +X \\ + & -X \\ \hline & 0 \end{array}$$

Binaire

0	1	1	0	1	Nombre +
1	0	0	1	0	Nombre -

	0	1	1	0	1	
+	1	0	0	1	0	
	1	1	1	1	1	-0
	0	0	0	0	0	+0

Attention à la double représentation du zéro

Octal

0	7	2	6	Nombre +
7	0	5	1	Nombre -

	0	7	2	6	
+	7	0	5	1	
	7	7	7	7	-0
	0	0	0	0	+0

Attention à la double représentation du zéro

- **<u>En binaire</u>**

0+1 = 1

1+0 = 1

1+1 = 10

	0	1	1	0	1	
+					+1	
	1	0	0	1	1	

C'est le complément vrai

0726

CR (complément chiffre par chiffre)

7051

CV (+1)

7052

	0	7	2	6
+	7	0	5	2
~~1~~	0	0	0	0

1.2 Conversion d'entier.

a) Conversion d'une base B vers une base 10.

$N_B = (C_3+C_2+C_1+C_0)_B$

3 additions et 4 produits et 4 puissances → $N_{10} = C_3B^3+C_2B^2+C_1B^1+C_0B^0$

4 additions et 4 produits → $[([(0*B+C_3)B+C_2]B+C_1)B+C_0]$

<u>Exemple :</u> $(212)_8$

0*8	+2	=2
2*8	+1	=17
17*8	+2	$=(138)_{10}$

- **Exercice**

$(101101)_2 = (45)_{10}$

32	16	8	4	2	1	
1	0	1	1	0	1	
32	0	8	4	0	1	=45

$(245)_8 = (165)_{10}$

0*8	+2	= 2
2*8	+4	= 20
20*8	+5	= 165

$(1AF)_{16} = (431)_{10}$

0*16	+1	= 1
1*16	+10	= 26
26*16	+15	= 431

b) Convertir d'une base 10 vers une base B

$C_3C_2C_1C_0)_B$ $N_{10} = C_3B^3 + C_2B^2 + C_1B^1 + C_0B^0$

N'_{10}

$N_{10} / B = C_3B^2 + C_2B^1 + C_1B^0$ C_0 = est le reste de la division entière

Ex :

10 / 3 = 3,333333

10/3 = 3 avec comme reste 1

$N'_{10} = C_3B^1 + C_2B^0$ C_1 est le reste de la division entière

- **Exemples**

$(37)_{10} \rightarrow (100101)_2$

37 : 2	=18 reste	1
18 :2	= 9 reste	0
9 : 2	= 4 reste	1
4 : 2	=2 reste	0
2 : 2	= 1 reste	0
		1

sens de lecture

- **Exercices :**

$(43)_{10} = (101011)_2$

43 :2	= 21 reste	1
21 : 2	= 10 reste	1
10 : 2	= 5 reste	0
5 : 2	= 2 reste	1
2 : 2	= 1 reste	0
		1

$(145)_{10} = (221)_8$

145 : 8	= 18 reste	1
18 : 8	= 2 reste	2
		2

$(217)_{10} = (D9)_{16}$

217 : 16	= 13 reste	9
		D

c) convertir rapidement d'une base B1 vers B2

B1 → 10 → B2

B1 → 2 → B2

Base 8 {0 → 7}

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$(10)_8$ → $(1000)_2$

$1*8^1$
$1*2^3$

$(234)_8$

(010 011 $100)_2$

Base 16 {0 → 9, A,B,C,D,E,F}

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

$(10)_{16} = (00010000)_2$

$1*16^1$
2^4

$(001|101|101)_2=(155)_8$

Un chiffre en base 8 représente 3 chiffres en base 2 (confer table)

$(0110|1100|1011)_2 = (6CB)_{16}$

Un chiffre en base 16 représente 4 chiffres en base 2 (confer table)

Remarque : le fait de rajouter un « **0** » ne change rien au chiffre mais permet de mieux visualiser dans la table

- **Exemples**

a) $(BCA)_{16} \rightarrow ()_8$

$(101|111|001|010)_2$

$(5712)_8$

b) $(7215)_8 \rightarrow (E8D)_{16}$

$(1110|1000|1101)_2$

$(E8D)_{16}$

- **Exercices récapitulatifs : Conversion d'entier**

a) *Base B vers 10*

$(176)_8$

0*8 +1 =1

1*8 +7 =15

15*8 +6 $=(126)_{10}$

$(1101011)_2 = (107)_{10}$

64	32	16	8	4	2	1	
1	1	0	1	0	1	1	
64	32	0	8	0	2	1	=107

$(AF3)_{16}$

0*16 +10	=10	
10*16+15	=175	
175*16	+3	$=(2803)_{10}$

b) *Base 10 vers B*

$(1796)_{10} \rightarrow (704)_{16}$

1796 : 16 = 112 reste	4
112 : 16 = 7 reste	0
	7

$(689)_{10} \rightarrow (1261)_8$

698 : 8 = 86 reste	1
86 : 8 = 10 reste	6
10 :8 = 1 reste	2
	1

$(161)_{10} \rightarrow (10100001)_2$

161 : 2 = 80 reste	1
80 : 2 = 40 reste	0
40 : 2 = 20 reste	0
20 : 2 = 10 reste	0
10 : 2 = 5 reste	0
5 : 2 = 2 reste	1
2 :2 = 1 reste	0
	1

c) *Base B_1 vers B_2*

$(1723)_8 \rightarrow (3D3)_{16}$

$(0011|1101|0011)_2$
$(3D3)_{16}$

$(98A)_{16} \rightarrow (4612)_8$

$(100|110|001|010)_2$

$(4612)_8$

1.3 Conversion de nombres fractionnaires purs.

a) nombre de rang à conserver

BS = base source
BC = base cible

(0.xyzk
(0.C-1C-2C3C-4C-5)B
N10 = C-1B-1+C-2B-2+C-3B-3…

$(0.1)^n{}_{BS} = (0.1)^k{}_{BC}$

$\log_{BC}(0.1)^n{}_{BS} = \log_{BC}(0.1)^k{}_{BC}$
$\log a^b = b*\log a$
$n*\log(0.1)_{BS} = k*\log B_C(0.1)_{BC}$
$n*\log_{BC}(10)_{BS} = k*\log_{BC}(10)_{BC}$

$(10)_{BC} = BC$
$(10)_{BS} = BS$

$N*\log_{BC} BS = k*\log_{BC} BC$
$N*\log_{BC} BS = k$

$\log_a b = \log_{10} b / \log_{10} a$
n*log BS /logBC = k

Soit BS = 10 (1 type d'exercice)*
Soit BC = 10 (2ème type d'exercice)**

* → n * 1/ logBC = k
* → n*logBS = k

Base B	2	8	16
Base B vers base 10	N*0.301	N*0.903	N*1.204
Base 10 vers base B	N*3.321	N*1.107	N0.830

NB = (.C-1C-2C-3C-4)B
B * N10 = (C-1B-1 + C-2B-2 + C-3B-3 + C-4B-4)*B
= C-1B0,+C-2B-1+C-3B-2+C-4B-3 → N'10

N'10 = C-2B-1+C-3B-2+C-4B-3)*b
= C-2,+C-3B-1+C-4B-2

- **Exemples :**

(.946)10 = (.7442)8

10 vers B
n = 3
k = 3 * 1.107 = 3.321 = 4

.946 * 8 =	7	0.568	
0.548*8 =	4	0.544	sens de lecture
0.544*8 =	4	0.352	
0.352*8=	2	0.816	

- Exercices :

(.71)10 → (.1011010)2

10 vers B
N = 2
K = 2*3.321 = 6.642 = 7

.71*2 =	1	.42
.42*2=	0	.84
.84*2=	1	.68
.68*2=	1	.36
.36*2=	0	.72
.72*2=	1	.44
.44*2=	0	.88

(.972)10 → (.F8D)16

10 vers B
N = 3
K = 3*0.830=2.49 = 3

.972*16 =	15	.552
.552*16=	8	.832
.832*16=	13	.312

b) Conversion d'une base B vers la base 10

NB(.C-1C-2C-3C-4)B
N10 = C-1B-1+C-2B-2+C-3B-3+C-4B-4
(C-1C-2C-3-C-4)B4 l'exposant de B est déterminé par le nombre de rang
C-1B3+C-2B2+C-3B1+C-4B2

- **Exemple :**

(.762)8
(.762)8*8^3
$(762)_8$

(762)8 → (.972)10
Conversion d'entier
0*8 +7= 7
7*8+6= 62
62*8+2= 498

N=3
K = 3*0.903 = 2.79 = 3

498/8^3 = .972

- **Exercices :**

(.101101)2 = (.70)10

(.101101)2 *2^6

(101101)

32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	0	1

= 45

N = 6
K = 6*0.301 = 1.806 = 2

45 / 2^6 = .70

(.1A91)16 = (.10377)10

N = 4
K = 4*1.204 = 4.816 = 5
(1A91)16

0*16 +1=	1
1*16+10=	26
26*16+9=	425
425*16+1=	6801

$6801/16^4$ = .10377

2. L'algèbre booléenne

Valeur 0 → absence d'un phénomène physique
Valeur 1 → présence d'un phénomène physique

2.1 Les fonctions à une seule variable

X → 0
1

X	f1	f2	f3	f4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- f1(X) = 0
- f4(X) = 1
- f2(X) =X
- f3(X) = $\overline{X}$

a) La fonction NON

- Représentation algébrique :

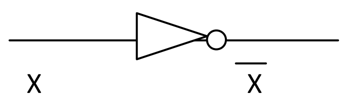
$$f(X) = \overline{X}$$

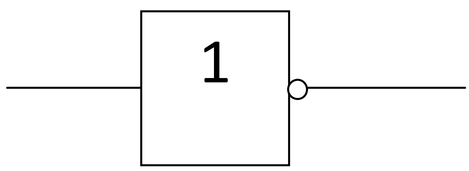
- Table de vérité :

X	f(X)
0	1
1	0

- Schéma

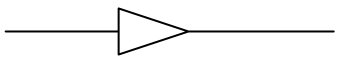
  - Porte logique





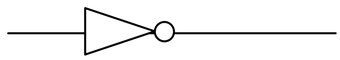
- Electrique

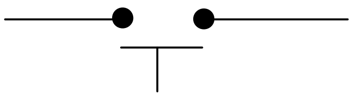
f(X) = X



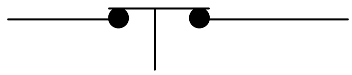
« Buffer »

f(X) = $\overline{X}$





Contact normalement ouvert (NO)



Contact normalement fermé (NF)

2.2 Les fonctions à 2 variables.

x	y	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

f1(X,Y) = 0
f16(X,Y) = 1
f4(X,Y) = X
f6(X,Y) = y
f13(X,Y) = $\overline{X}$
f11(X,Y) = $\overline{Y}$
f2(X,Y) = X*Y
f15(X,Y)= $\overline{x*y}$

ET : la sortie vaut 1 si X vaut 1 ET y vaut 1

a) La fonction ET(AND)

- Représentation algébrique :

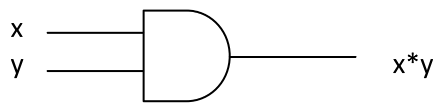
  x * y ou x^y

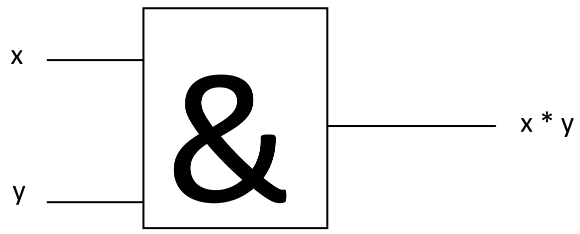
- Table de vérité

x	y	x * y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

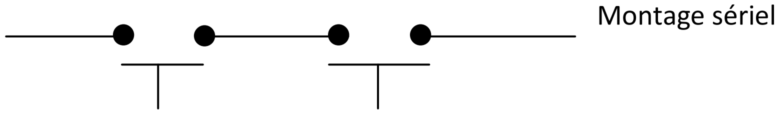
- Schéma

  - Porte logique





  - Représentation électrique



b) La fonction OU(OR)

- Représentation algébrique :

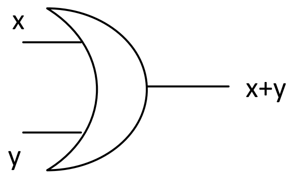
x + y

- Table de vérité.

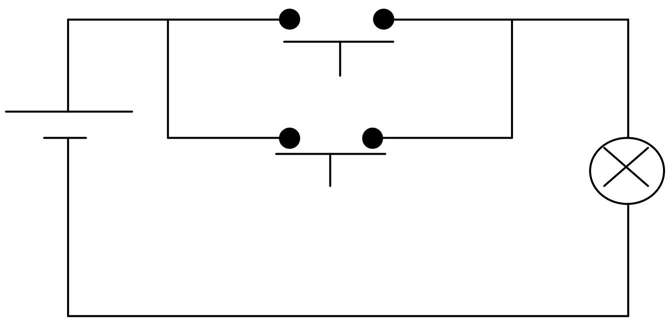
y	X	X + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Schéma

  - Porte logique



  - Représentation électrique.



Montage en parallèle

c) La fonction OU exclusif (XOR)

- Représentation algébrique

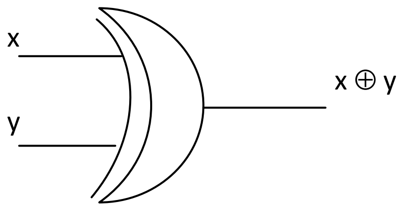
X ⊕ y

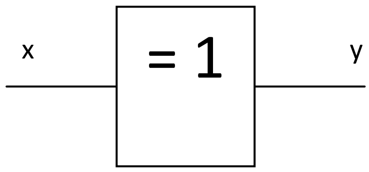
- Table de vérité

x	y	x ⊕ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Schéma

❖ Porte logique





d) La fonction NON ET (NAND)

- Représentation algébrique

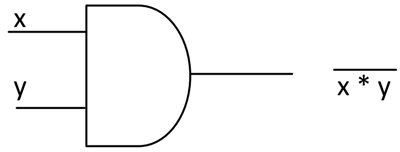
$\overline{x * y}$

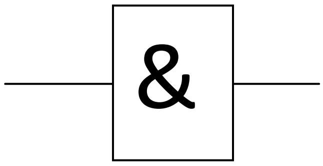
- Table de vérité

x	y	$\overline{x* y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Schéma

    - Porte logique





e) Fonction NON OU (NOR)

- Représentation algébrique

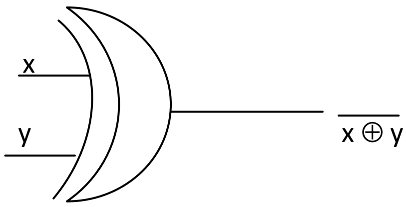
$\overline{x + y}$

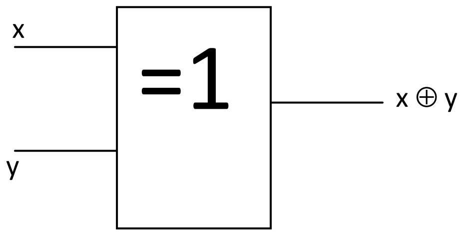
- Table de vérité

y	x	$\overline{x * y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Schéma

    - Porte logique





2.3 Postulat et théorème

Postulat 2 : à chaque opérateur est associé un élément neutre.

$$x + 0 = x \qquad x * 1 = x$$

Postulat 3 : commutativité des opérateurs + et *

$$x + y = y + x \qquad x * y = y * x$$

Postulat 4 : les opérateurs + et * sont mutuellement distributifs.

$$x + (y * z) = (x + y) * (x + z) \qquad x*(y + z) + (x * z)$$

Postulat 5 : pour chaque variable x, il existe son complément noté $\overline{x}$

$$(x + \overline{x}) = 1 \qquad (x * \overline{x}) = 0$$

Théorème 4 : loi de 0 et 1

$$(x + 1) = 1 \qquad (x * 0) = 0$$

Théorème 5 : loi d'impotence

$$(x + x) = x \qquad (x*x) = x$$

Théorème 6 : première loi d'absorption

$$x + (x * y) = x \qquad x*(x + y) = x$$

Théorème 7 : deuxième loi d'absorption

$$x + (\overline{x} * y) = x + y \qquad x * (\overline{x} + y) = x * y$$

Théorème 10 : loi d'involution

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Théorème 11 : les opérateurs + et * sont associatifs.

$$(x+y) + z = x + (y+z) \qquad (x*y) * z = x * (y * z)$$

Théorème 12 : loi de De Morgan

$$\overline{x + y} = \overline{x} * \overline{y} \qquad \overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Le OU exclusif

$$x \oplus y = \overline{x} * y + x * \overline{y}$$

2.4 Tables de KARNAUGH.

Tables → grilles → chaque case est associée à un produit canonique

Grilles avec deux variables

xy → $x\,y$ → $x\,\bar{y}$ → $\bar{x}\,y$ → $\bar{x}\,\bar{y}$

Quatre produits canoniques (2*2)

Deux cases voisines (1 côtés commun) ont des produits canoniques adjacents (qui ne différent que d'une seule variable)

		y	
	$\bar{x}\,\bar{y}$ 00 P0	$\bar{x}y$ 01 P1	
	$x\bar{y}$ 10 P2	Xy 11 P3	x

Deux variables → grilles carrée 4 cases (2*2)

x y

poids faible

poids fort

	y	
P0 0	P1 1	
P2 1	P3 0	x

$$\overset{0}{\bar{x}y} + \overset{1}{x\bar{y}}$$

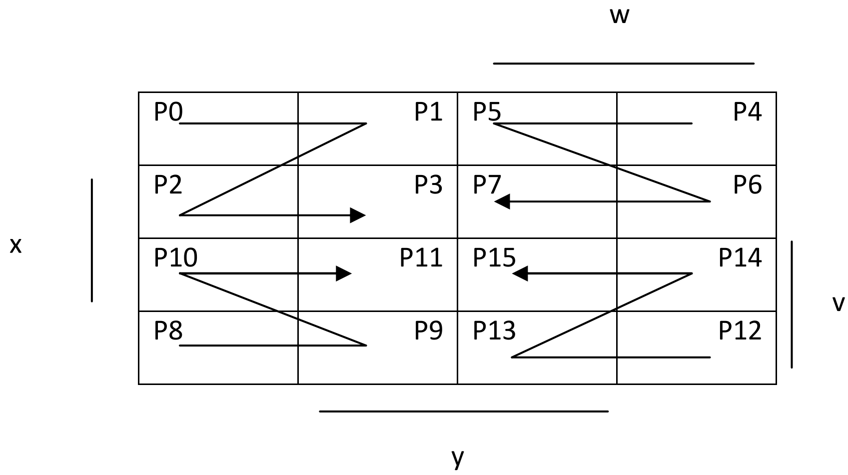
f(x,y) = $\bar{x}y + x\bar{y}$

P1 P2

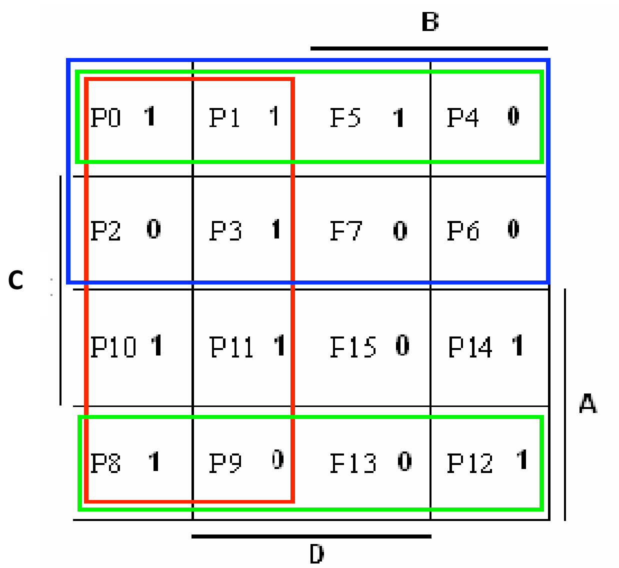
Trois variables → wxy → grille 8 cases rectangulaire

			w	w
	P0	P1	P5	P4
x	P2	P3	P7	P6
		y	y	

Quatre variables → vwxy 16 cases (4*4)



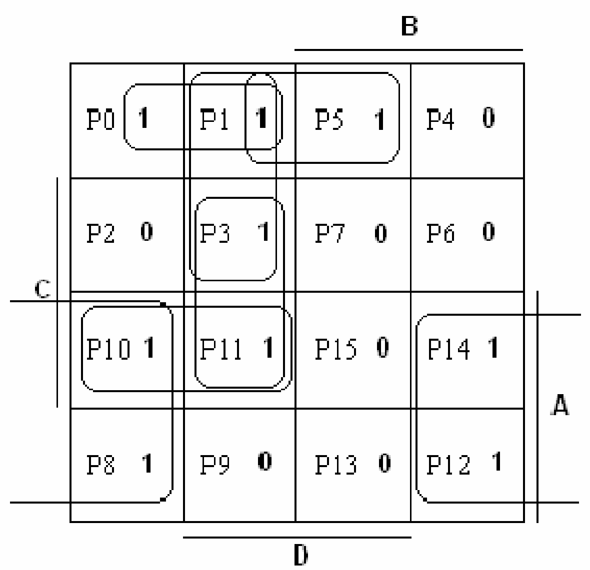
Exemples :



Groupe :

2 cases → une variable en moins
4 cases → deux variables en moins
8 cases →trois variables en moins
16 cases

- Cases comprenant « 1 »
- Cases voisines (coté commun)



IP Essentiels
Non essentiels

Solution = IPE(s) + combinaison IPNE (pas tous)

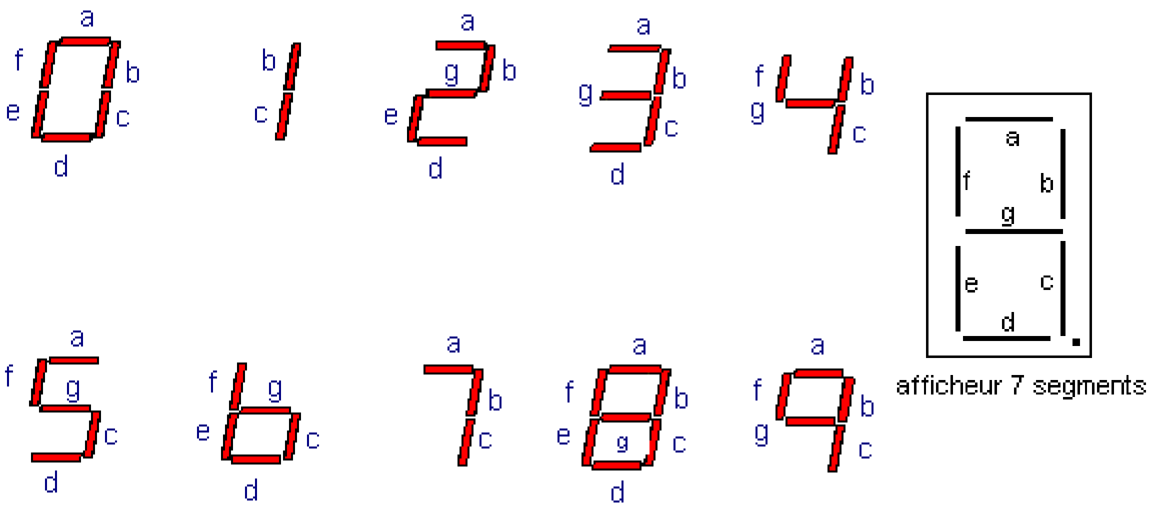
P1P5 + P8P10P12P14 + P0P1 + P3P11

$D\bar{A}\bar{C}$ + $\bar{A}D$ + $C\bar{D}B$ + $\bar{B}\bar{C}\bar{A}$

P0P1 → IPNE
P1P5 →IPE
P1P3 → IPNE
P3P11 → IPNE
P0P8 → IPNE
P10P1 → IPNE
P8P10P12P4 → IPE

3. Les fonctions combinatoires

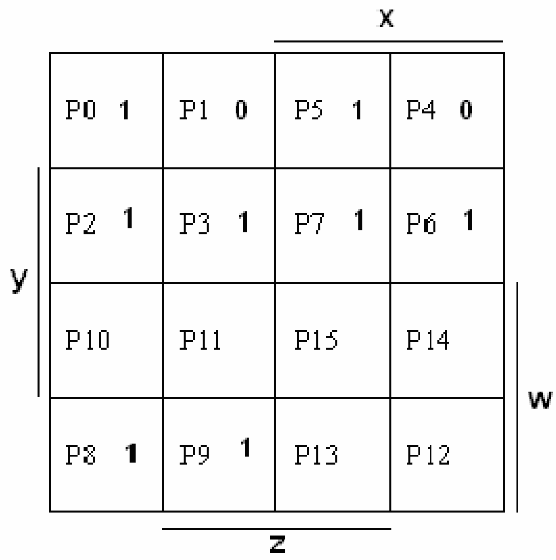
3.1 L'afficheur 7 segments

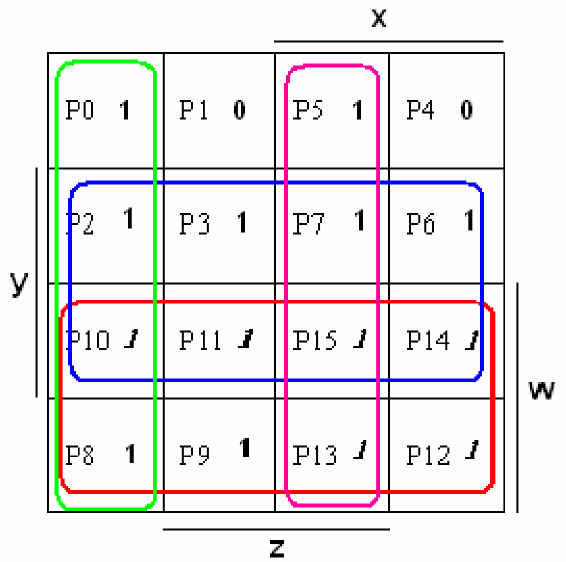


Nous pouvons établir la table de vérité suivante :

Entrée				Sortie						
w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	G
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

3.1.1 Segment a



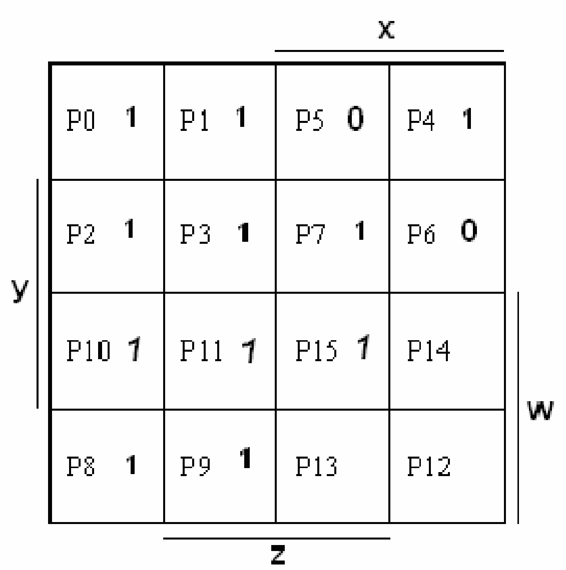


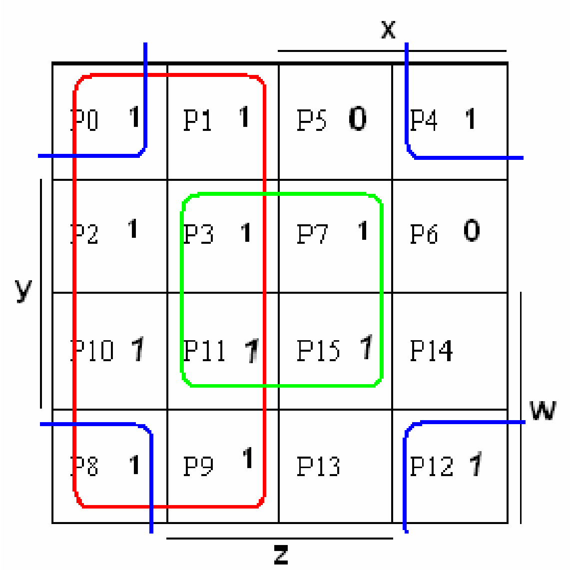
Les différents regroupements auront donc comme équation :

P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 : W
P2 P3 P6 P7 P10 P11 P14 P15 : y
P0 P2 P10 P8 : $\overline{zx}$
P5 P7 P15 P13 : xz

Ce qui donnera comme équation finale : $w + y + \overline{zx} + xz$

3.1.2 Segment b



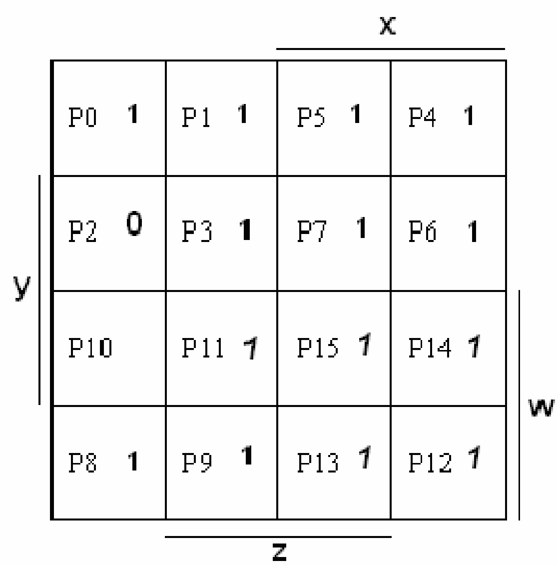


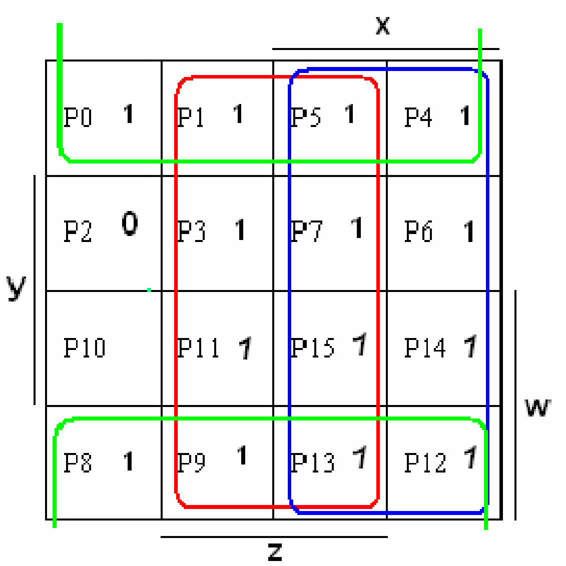
<u>Les différents regroupements auront donc comme équation :</u>

P0 P1 P2 P3 P8 P9 P10 P11 : $\overline{x}$
P3 P7 P11 P15 : yz
P0 P4 P8 P12 : $\overline{yz}$

<u>Ce qui donnera comme équation finale :</u> $\overline{x}$ + yz + $\overline{yz}$

3.1.3 Segment c



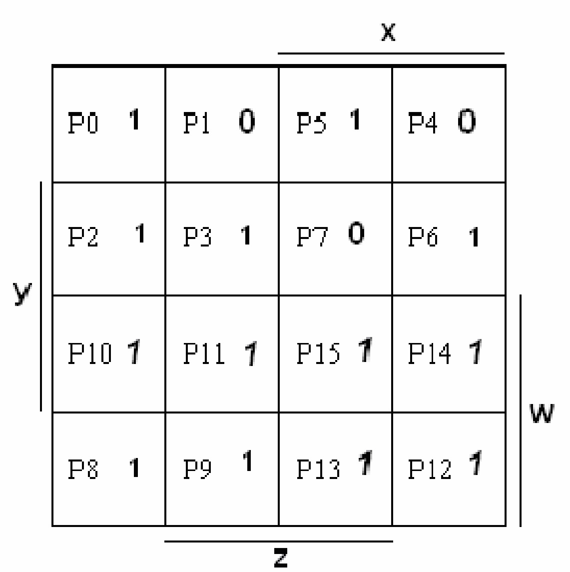


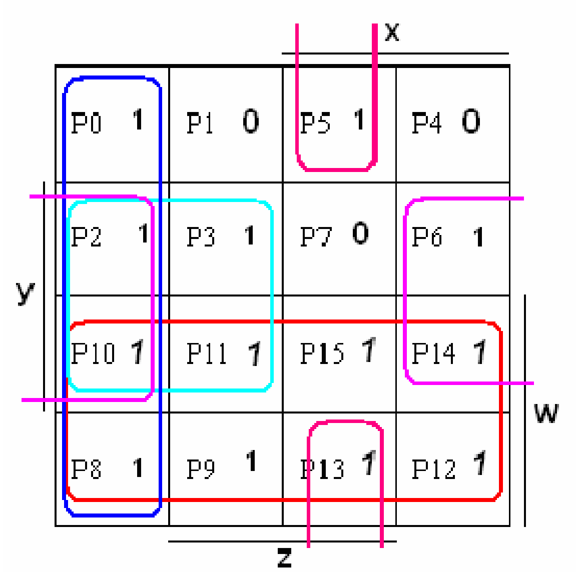
<u>Les différents regroupements auront donc comme équation :</u>

P1 P3 P5 P7 P11 P15 P9 P13 : z
P0 P1 P4 P5 P8 P9 P12 P13 : $\overline{y}$
P4 P5P6 P7 P14 P15 P12 P13 : x

<u>Ce qui donnera comme équation finale :</u> $\overline{y}$ + y + x

3.1.4 Segment d



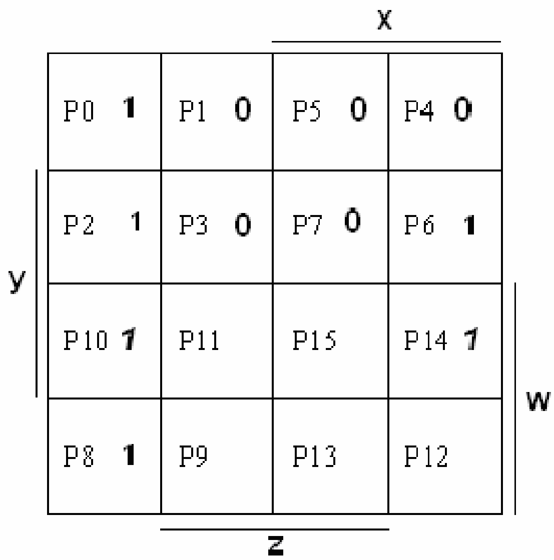


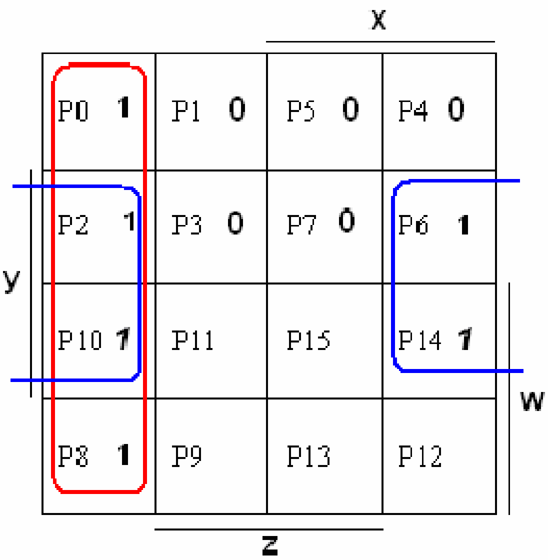
<u>Les différents regroupements auront donc comme équation :</u>

P0 P2 P10 P8 : $\overline{zx}$
P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
P2 P3 P10 P11 : $y\overline{x}$
P2 P10 P6 P14 : $y\overline{z}$
P5 P13 : $xz\overline{y}$

<u>Ce qui donnera comme équation finale :</u> $\overline{zx} + w + y\overline{x} + y\overline{z} + xz\overline{y}$

3.1.5 Segment e



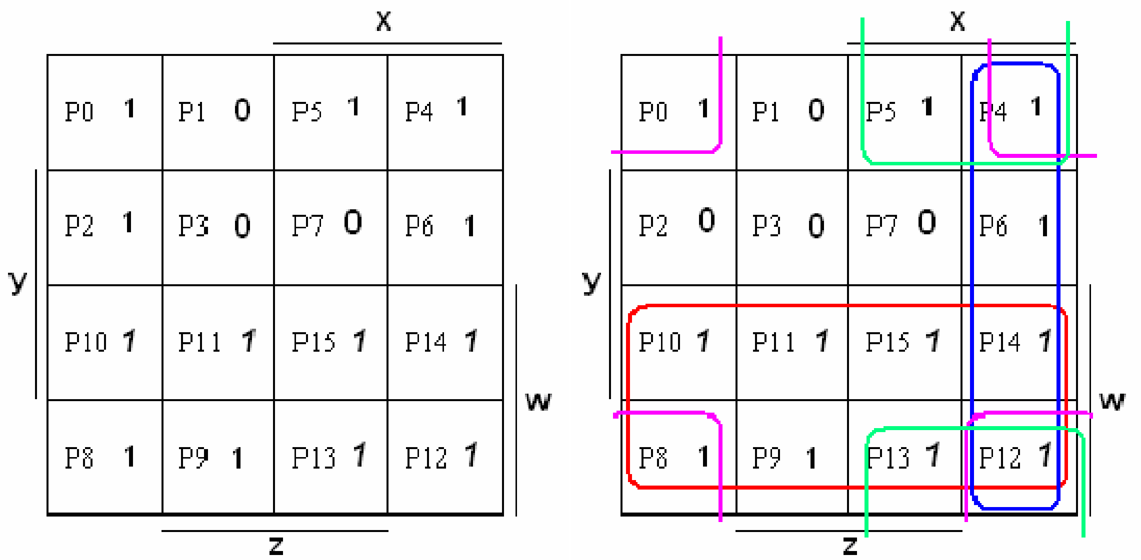


<u>Les différents regroupements auront donc comme équation :</u>

P0 P2 P10 P8 : $\overline{zx}$
P2 P10 P6 P14 : $\overline{z}y$

<u>Ce qui donnera comme équation finale :</u> $\overline{zx} + \overline{z}y$

3.1.6 Segment f

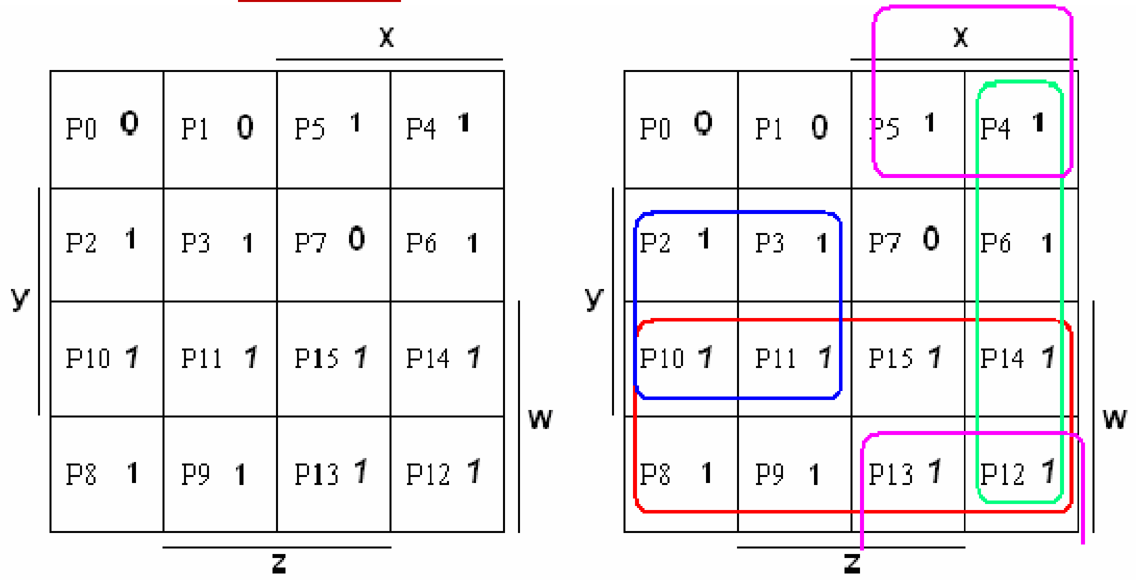


Les différents regroupements auront donc comme équation :

P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
P4 P6 P14 P12 : $x\overline{z}$
P5 P4 P13 P12 : $\overline{y}x$
P0 P4 P8 P12 : $\overline{yz}$

Ce qui donnera comme équation finale : $w + x\overline{z} + \overline{y}x + \overline{yz}$

3.1.7 Segment g



Les différents regroupements auront donc comme équation :

P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
P4 P6 P14 P12 : $x\bar{z}$
P2 P3 P10 P11 : $y\bar{x}$
P5 P4 P13 P12 : $\bar{y}x$

Ce qui donnera comme équation finale : $w + x\bar{z} + y\bar{x} + \bar{y}x$