

Cours de logique.

Notes prises au cours de Mr Wilfart

Ces notes n'ont pas été approuvées par le prof, elles ne peuvent donc être utilisées comme source sûre, des erreurs faites par l'auteur peuvent s'y trouver.

Ceci n'est qu'un support pouvant éventuellement vous aider dans votre compréhension de la logique.

Table des matières

1.	Etude du système binaire.....	5
1.1	Les nombres et leur représentation.....	5
a)	Définition	5
b)	Numération de position	5
c)	Les ordinateurs et les nombres	6
d)	Les nombres fractionnaires	6
e)	Les nombres négatifs.....	7
1.2	Conversion d'entier.....	8
a)	Conversion d'une base B vers une base 10.....	8
▪	Exercice	9
b)	Convertir d'une base 10 vers une base B.....	9
▪	Exemples	10
▪	Exercices :.....	10
c)	convertir rapidement d'une base B1 vers B2	11
▪	Exemples	12
▪	Exercices récapitulatifs : Conversion d'entier.....	12
1.3	Conversion de nombres fractionnaires purs.....	14
a)	nombre de rang à conserver	14
▪	Exemples :	15
b)	Conversion d'une base B vers la base 10.....	16
▪	Exemple :.....	16
▪	Exercices :.....	16
2.	L'algèbre booléenne	18
2.1	Les fonctions à une seule variable.....	18
a)	La fonction NON.....	18
2.2	Les fonctions à 2 variables.....	19
a)	La fonction ET(AND).....	20
b)	La fonction OU(OR).....	21
c)	La fonction OU exclusif (XOR)	22
d)	La fonction NON ET (NAND)	22
e)	Fonction NON OU (NOR)	23
2.3	Postulat et théorème	24

2.4	Exercice de logique.....	25
1.	Simplifier les équations suivantes :	25
2.	Exercices postulat et théorème :	28
3.	Simplifier les équations suivantes :	29
2.5	Tables de KARNAUGH.....	30
3.	Les fonctions combinatoires.....	33
3.1	L'afficheur 7 segments	33
3.1.1	Segment a	34
3.1.2	Segment b	34
3.1.3	Segment c	35
3.1.4	Segment d	36
3.1.5	Segment e	36
3.1.6	Segment f	37
3.1.7	Segment g	38
3.2	Le code gray.....	38
3.3	Le code majoré de trois.....	41
4.	Logique séquentielle.....	42
a)	Exercice 1 :	42
1)	Graphe des séquences	42
2)	Tables des phases incomplètes	43
3)	Tables des phases complètes.	43
4)	Fusion	43
5)	Choix des variables auxiliaires	44
6)	Assignment	44
7)	Table de karnaught	44
8)	Schéma logique	45
9)	Schéma électronique	45
b)	Exercice 2 : Château d'eau	46
1)	Le graphe des séquences	46
2)	Tables des phases	46
3)	Fusion	47
4)	Karnaught	47
5)	Schéma logique	47
6)	Schéma électrique	48

c) Exercice 3 : le passe plat	48
1) Le graphe des séquences	49
2) La table des phases	50
3) Fusion	50
4) Assignement.....	51
5) Karnaught.....	51
d) Exercice 4 : le va et vient.	53
1) Le graphe des séquences	53
2) La table des phases complètes et incomplètes.	54
3) Fusion et assignement.....	54
4) Tables de Karnaught	55
5) Schéma logique.....	56
6) Schéma électrique	56
e) Exercice 5 :	57
1) Le graphe des séquences	57
2) Tables des phases incomplètes et complètes.....	57
3) Fusion	58
4) Assignement.....	58
5) Tables de Karnaught	59
6) Schéma logique.....	60
7) Schéma électrique	62

Logique

1. Etude du système binaire.

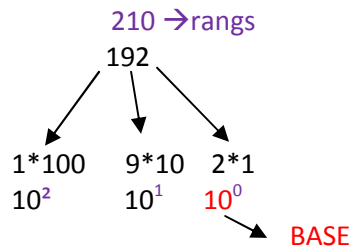
1.1 Les nombres et leur représentation

a) Définition

Système	base	Chiffres
décimal	10	0 → 9
octal	8	0 → 7
binaire	2	0 ; 1
hexadécimal	16	0 → 9 ; A → F

Remarque : dans le système hexadécimal les lettres peuvent être en majuscule ou en minuscule.

b) Numération de position



D'une façon générale nous pouvons étendre ce concept exprimé dans une base B

$$N_{10} = d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \dots + d_3 10^3 + \dots + d_0 10^0$$

$$N_B = C_n C_{n-1} \dots C_3 C_2 C_1 C_0$$

$$N_{10} = C_n B^n + C_{n-1} B^{n-1} + \dots + C_3 B^3 + \dots + C_0 B^0$$

↙ MSD
↘ LSD

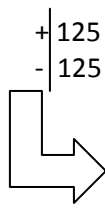
Dans les ordinateurs : système binaire (Base 2 ; {0 ; 1})

1 chiffre → digit
 Binaire → binary

} Binary digit → bit

Nombres de 8 bits → octets, byte
 Ex : Disque dur 750GB B majuscule → bytes
 Vitesse 100Mb/sec b minuscule → bits
 Microprocesseur 32 bits ; 64 bits

e) Les nombres négatifs



Représentation en signe très pratique car rapidité pour savoir qu'un nombre est négatif

On travaille avec le chiffre de poids fort pour représenter le signe.

S=0 → nombre positif

S=B-1 → nombre négatif

Ex : 1|0101011



Nombre négatif

$$\begin{array}{r} \text{Nombre} \quad x \\ + \quad \frac{+X}{-X} \\ \hline 0 \end{array}$$

Binaire

0	1	1	0	1	Nombre +
1	0	0	1	0	Nombre -

	0	1	1	0	1	
+	1	0	0	1	0	
	1	1	1	1	1	-0
	0	0	0	0	0	+0

Attention à la double représentation du zéro

Octal

0	7	2	6	Nombre +
7	0	5	1	Nombre -

	0	7	2	6	
+	7	0	5	1	
	7	7	7	7	-0
	0	0	0	0	+0

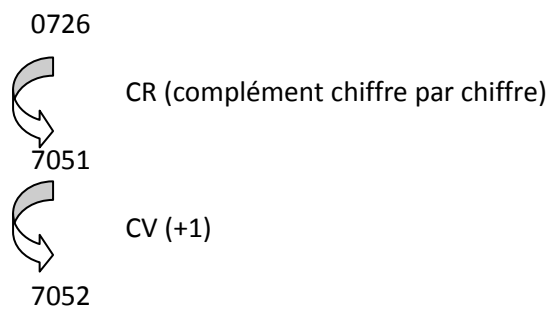
Attention à la double représentation du zéro

• **En binaire**

0+1 = 1
 1+0 = 1
 1+1 = 10

	0	1	1	0	1	
+					+1	
	1	0	0	1	1	

C'est le complément vrai



	0	7	2	6
+	7	0	5	2
1	0	0	0	0

1.2 Conversion d'entier.

a) Conversion d'une base B vers une base 10.

$N_B = (C_3+C_2+C_1+C_0)_B$

3 additions et 4 produits et 4 puissances $\rightarrow N_{10} = C_3B^3+C_2B^2+C_1B^1+C_0B^0$

4 additions et 4 produits $\rightarrow [(((0*B+C_3)B+C_2)B+C_1)B+C_0]$

Exemple : $(212)_8$

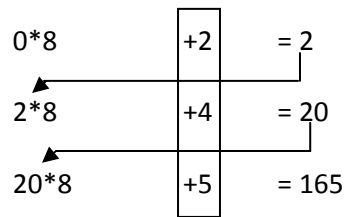
$0*8$	+2	=2
$2*8$	+1	=17
$17*8$	+2	=(138) ₁₀

▪ **Exercice**

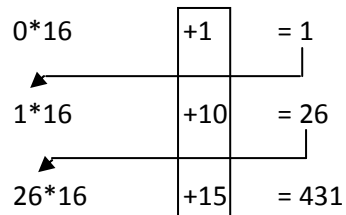
$(101101)_2 = (45)_{10}$

32	16	8	4	2	1	
1	0	1	1	0	1	
32	0	8	4	0	1	=45

$(245)_8 = (165)_{10}$



$(1AF)_{16} = (431)_{10}$



b) Convertir d'une base 10 vers une base B

$$C_3C_2C_1C_0)_B \quad N_{10} = C_3B^3 + C_2B^2 + C_1B^1 + C_0B^0$$

↑ ↑ ↑ ↑
 N'_{10}

$N_{10} / B = C_3B^2 + C_2B^1 + C_1B^0$ $C_0 =$ est le reste de la division entière

Ex :

$10 / 3 = 3,333333$

$10/3 = 3$ avec comme reste 1

$N'_{10} = C_3B^1 + C_2B^0$ C_1 est le reste de la division entière

▪ **Exemples**

$(37)_{10} \rightarrow (100101)_2$

$37 : 2 = 18 \text{ reste}$

$18 : 2 = 9 \text{ reste}$

$9 : 2 = 4 \text{ reste}$

$4 : 2 = 2 \text{ reste}$

$2 : 2 = 1 \text{ reste}$

1
0
1
0
0
1



sens de lecture

▪ **Exercices :**

$(43)_{10} = (101011)_2$

$43 : 2 = 21 \text{ reste } 1$

$21 : 2 = 10 \text{ reste } 1$

$10 : 2 = 5 \text{ reste } 0$

$5 : 2 = 2 \text{ reste } 1$

$2 : 2 = 1 \text{ reste } 0$

1



$(145)_{10} = (221)_8$

$145 : 8 = 18 \text{ reste } 1$

$18 : 8 = 2 \text{ reste } 2$

2



$(217)_{10} = (D9)_{16}$

$217 : 16 = 13 \text{ reste } 9$

D



c) convertir rapidement d'une base B1 vers B2

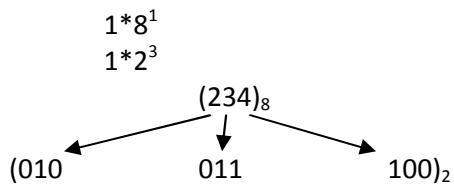
B1 \rightarrow 10 \rightarrow B2

B1 \rightarrow 2 \rightarrow B2

Base 8 {0 \rightarrow 7}

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$(10)_8 \rightarrow (1000)_2$



Base 16 {0 \rightarrow 9, A,B,C,D,E,F}

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

$(10)_{16} = (00010000)_2$

$1 \cdot 16^1$
 2^4

$$(001|101|101)_2 = (155)_8$$

Un chiffre en base 8 représente 3 chiffres en base 2 (confer table)

$$(0110|1100|1011)_2 = (6CB)_{16}$$

Un chiffre en base 16 représente 4 chiffres en base 2 (confer table)

Remarque : le fait de rajouter un « 0 » ne change rien au chiffre mais permet de mieux visualiser dans la table

▪ **Exemples**

a) $(BCA)_{16} \rightarrow ()_8$

$$(101|111|001|010)_2$$

$$(5712)_8$$

b) $(7215)_8 \rightarrow (E8D)_{16}$

$$(1110|1000|1101)_2$$

$$(E8D)_{16}$$

▪ **Exercices récapitulatifs : Conversion d'entier**

a) Base B vers 10

$$(176)_8$$

$$0 \cdot 8 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 8 + 7 = 15$$

$$15 \cdot 8 + 6 = (126)_{10}$$

$$(1101011)_2 = (107)_{10}$$

64	32	16	8	4	2	1	
1	1	0	1	0	1	1	
64	32	0	8	0	2	1	=107

$(AF3)_{16}$

$$\begin{array}{rcl}
 0 \cdot 16 + 10 & = & 10 \\
 10 \cdot 16 + 15 & = & 175 \\
 \longleftarrow & & \\
 175 \cdot 16 + 3 & = & (2803)_{10}
 \end{array}$$

b) Base 10 vers B $(1796)_{10} \rightarrow (704)_{16}$

$$\begin{array}{rcl}
 1796 : 16 = 112 \text{ reste } & 4 & \uparrow \\
 112 : 16 = 7 \text{ reste } & 0 & \\
 & 7 &
 \end{array}$$

 $(689)_{10} \rightarrow (1261)_8$

$$\begin{array}{rcl}
 689 : 8 = 86 \text{ reste } & 1 & \uparrow \\
 86 : 8 = 10 \text{ reste } & 6 & \\
 10 : 8 = 1 \text{ reste } & 2 & \\
 & 1 &
 \end{array}$$

 $(161)_{10} \rightarrow (10100001)_2$

$$\begin{array}{rcl}
 161 : 2 = 80 \text{ reste } & 1 & \uparrow \\
 80 : 2 = 40 \text{ reste } & 0 & \\
 40 : 2 = 20 \text{ reste } & 0 & \\
 20 : 2 = 10 \text{ reste } & 0 & \\
 10 : 2 = 5 \text{ reste } & 0 & \\
 5 : 2 = 2 \text{ reste } & 1 & \\
 2 : 2 = 1 \text{ reste } & 0 & \\
 & 1 &
 \end{array}$$

c) Base B_1 vers B_2 $(1723)_8 \rightarrow (3D3)_{16}$ $(0011 | 1101 | 0011)_2$ $(3D3)_{16}$ $(98A)_{16} \rightarrow (4612)_8$ $(100 | 110 | 001 | 010)_2$ $(4612)_8$

1.3 Conversion de nombres fractionnaires purs.

a) nombre de rang à conserver

BS = base source

BC = base cible

(0.xyzk

(0.C-1C-2C3C-4C-5)B

N10 = C-1B-1+C-2B-2+C-3B-3...

$$(0.1)_{BS}^n = (0.1)_{BC}^k$$

$$\log_{BC}(0.1)_{BS}^n = \log_{BC}(0.1)_{BC}^k$$

$$\log a^b = b \cdot \log a$$

$$n \cdot \log(0.1)_{BS} = k \cdot \log_{BC}(0.1)_{BC}$$

$$n \cdot \log_{BC}(10)_{BS} = k \cdot \log_{BC}(10)_{BC}$$

$$(10)_{BC} = BC$$

$$(10)_{BS} = BS$$

$$N \cdot \log_{BC} BS = k \cdot \log_{BC} BC$$

$$N \cdot \log_{BC} BS = k$$

$$\log_a b = \log_{10} b / \log_{10} a$$

$$n \cdot \log BS / \log BC = k$$

Soit BS = 10 (1 type d'exercice)*

Soit BC = 10 (2^{ème} type d'exercice)**

$$* \rightarrow n \cdot 1 / \log BC = k$$

$$* \rightarrow n \cdot \log BS = k$$

Base B	2	8	16
Base B vers base 10	N*0.301	N*0.903	N*1.204
Base 10 vers base B	N*3.321	N*1.107	N0.830

$$NB = (.C-1C-2C-3C-4)B$$

$$B * N10 = (C-1B-1 + C-2B-2 + C-3B-3 + C-4B-4) * B \\ = C-1B0, +C-2B-1+C-3B-2+C-4B-3 \rightarrow N'10$$

$$N'10 = C-2B-1+C-3B-2+C-4B-3) * b \\ = C-2, +C-3B-1+C-4B-2$$

▪ **Exemples :**

$$(.946)_{10} = (.7442)_8$$

10 vers B

$$n = 3$$

$$k = 3 * 1.107 = 3.321 = 4$$

$.946 * 8 =$	7	0.568	↓ sens de lecture
$0.548 * 8 =$	4	0.544	
$0.544 * 8 =$	4	0.352	
$0.352 * 8 =$	2	0.816	

• Exercices :

$$(.71)_{10} \rightarrow (.1011010)_2$$

10 vers B

$$N = 2$$

$$K = 2 * 3.321 = 6.642 = 7$$

$.71 * 2 =$	1	.42	↓
$.42 * 2 =$	0	.84	
$.84 * 2 =$	1	.68	
$.68 * 2 =$	1	.36	
$.36 * 2 =$	0	.72	
$.72 * 2 =$	1	.44	
$.44 * 2 =$	0	.88	

$$(.972)_{10} \rightarrow (.F8D)_{16}$$

10 vers B

$$N = 3$$

$$K = 3 * 0.830 = 2.49 = 3$$

$.972 * 16 =$	15	.552	↓
$.552 * 16 =$	8	.832	
$.832 * 16 =$	13	.312	

b) Conversion d'une base B vers la base 10

$NB(.C-1C-2C-3C-4)B$

$N_{10} = C-1B-1+C-2B-2+C-3B-3+C-4B-4$

$(C-1C-2C-3-C-4)B^4$ l'exposant de B est déterminé par le nombre de rang

$C-1B^3+C-2B^2+C-3B^1+C-4B^2$

▪ Exemple :

$(.762)_8$

$(.762)_8 * 8^3$

$(762)_8$

$(762)_8 \rightarrow (.972)_{10}$

Conversion d'entier

$0*8 + 7 = 7$

$7*8 + 6 = 62$

$62*8 + 2 = 498$

$N=3$

$K = 3*0.903 = 2.79 = 3$

$498/8^3 = .972$

▪ Exercices :

$(.101101)_2 = (.70)_{10}$

$(.101101)_2 * 2^6$

(101101)

32	16	8	4	2	1
1	0	1	1	0	1

$= 45$

$N = 6$

$K = 6*0.301 = 1.806 = 2$

$45 / 2^6 = .70$

$$(.1A91)_{16} = (.10377)_{10}$$

$$N = 4$$

$$K = 4 * 1.204 = 4.816 = 5$$

$$(1A91)_{16}$$

$$0 * 16 + 1 = 1$$

$$1 * 16 + 10 = 26$$

$$26 * 16 + 9 = 425$$

$$425 * 16 + 1 = 6801$$

$$6801 / 16^4 = .10377$$

2. L'algèbre booléenne

Valeur 0 → absence d'un phénomène physique

Valeur 1 → présence d'un phénomène physique

2.1 Les fonctions à une seule variable

X → 0
1

X	f1	f2	f3	f4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $f1(X) = 0$
- $f4(X) = 1$
- $f2(X) = X$
- $f3(X) = \overline{X}$

a) La fonction NON

- Représentation algébrique :

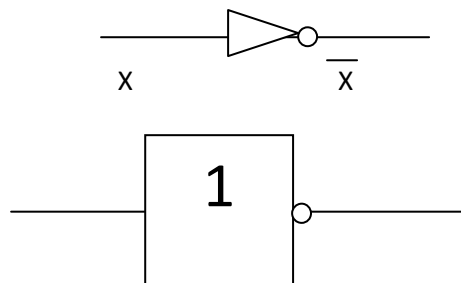
$$f(X) = \overline{X}$$

- Table de vérité :

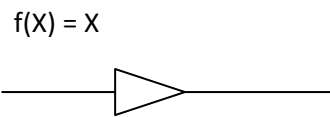
X	f(X)
0	1
1	0

- Schéma

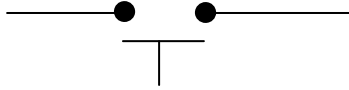
- ❖ Porte logique



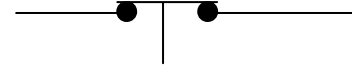
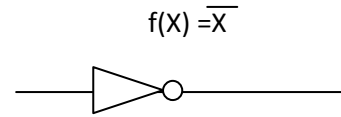
❖ Electrique



« Buffer »



Contact normalement ouvert (NO)



Contact normalement fermé (NF)

2.2 Les fonctions à 2 variables.

x	y	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

- f1(X,Y) = 0
- f16(X,Y) = 1
- f4(X,Y) = X
- f6(X,Y) = y
- f13(X,Y) = \overline{X}
- f11(X,Y) = \overline{Y}
- f2(X,Y) = $\overline{X*Y}$
- f15(X,Y) = $\overline{x*y}$

ET : la sortie vaut 1 si X vaut 1 ET y vaut 1

a) La fonction ET(AND)

- Représentation algébrique :

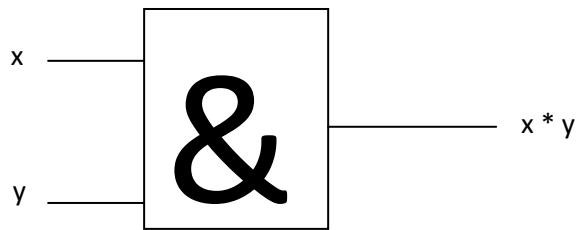
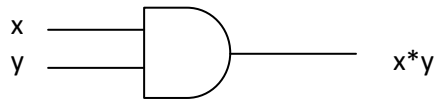
$$x * y \text{ ou } x^{\wedge}y$$

- Table de vérité

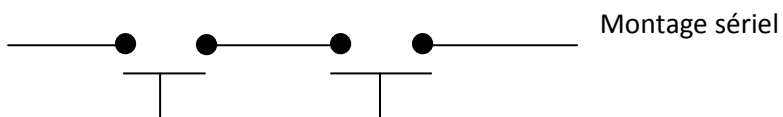
X	y	x * y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Schéma

❖ Porte logique



❖ Représentation électrique



b) La fonction OU(OR)

- Représentation algébrique :

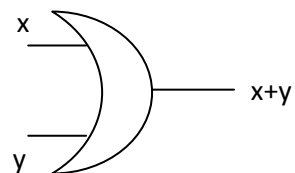
$$x + y$$

- Table de vérité.

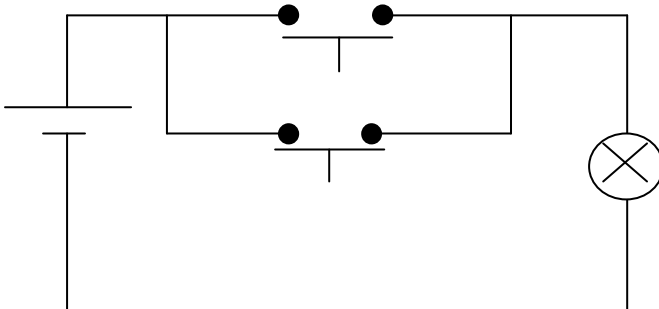
Y	X	X + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Schéma

- ❖ Porte logique



- ❖ Représentation électrique.



Montage en parallèle

c) La fonction OU exclusif (XOR)

- Représentation algébrique

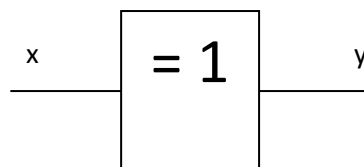
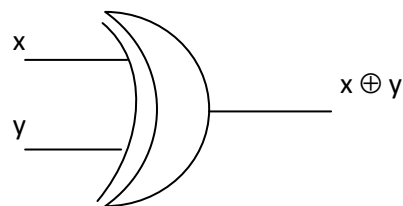
$$X \oplus y$$

- Table de vérité

x	Y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Schéma

- ❖ Porte logique



d) La fonction NON ET (NAND)

- Représentation algébrique

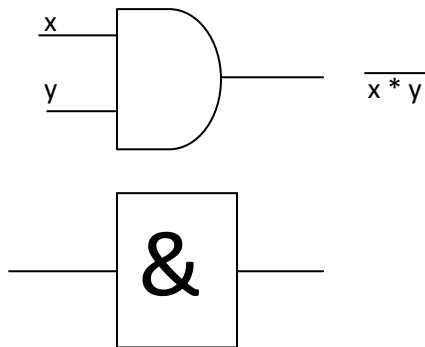
$$\overline{x * y}$$

- Table de vérité

X	y	$\overline{x * y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Schéma

- ❖ Porte logique



e) Fonction NON OU (NOR)

- Représentation algébrique

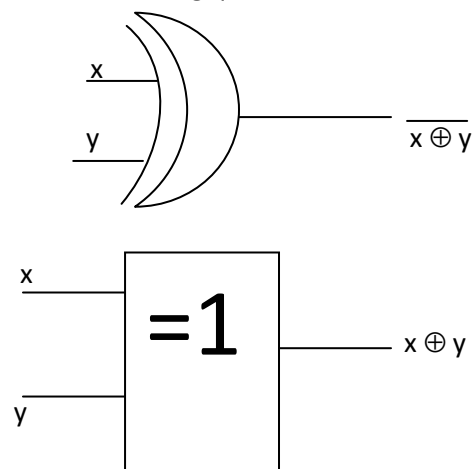
$$\overline{x + y}$$

- Table de vérité

Y	x	$\overline{x * y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Schéma

- ❖ Porte logique



2.3 Postulat et théorème

Postulat 2 : à chaque opérateur est associé un élément neutre.

$$x + 0 = x \quad x * 1 = x$$

Postulat 3 : commutativité des opérateurs + et *

$$x + y = y + x \quad x * y = y * x$$

Postulat 4 : les opérateurs + et * sont mutuellement distributifs.

$$x + (y * z) = (x + y) * (x + z) \quad x*(y + z) = (x * y) + (x * z)$$

Postulat 5 : pour chaque variable x, il existe son complément noté \bar{x}

$$(x + \bar{x}) = 1 \quad (x * \bar{x}) = 0$$

Théorème 4 : loi de 0 et 1

$$(x + 1) = 1 \quad (x * 0) = 0$$

Théorème 5 : loi d'impotence

$$(x + x) = x \quad (x * x) = x$$

Théorème 6 : première loi d'absorption

$$x + (x * y) = x \quad x*(x + y) = x$$

Théorème 7 : deuxième loi d'absorption

$$x + (\bar{x} * y) = x + y \quad x * (\bar{x} + y) = x * y$$

Théorème 10 : loi d'involution

$$\overline{\bar{x}} = x$$

Théorème 11 : les opérateurs + et * sont associatifs.

$$(x+y) + z = x + (y+z) \quad (x*y) * z = x * (y * z)$$

Théorème 12 : loi de De Morgan

$$\overline{x + y} = \bar{x} * \bar{y} \quad \overline{x * y} = \bar{x} + \bar{y}$$

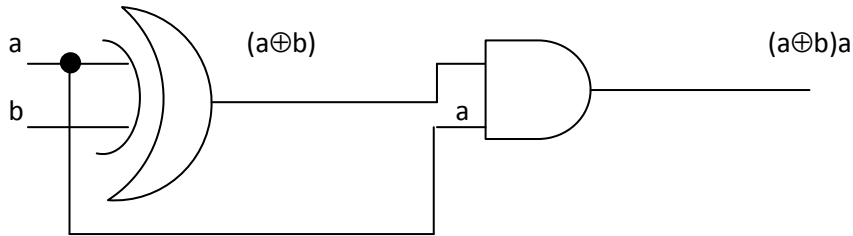
Le OU exclusif

$$x \oplus y = \bar{x} * y + x * \bar{y}$$

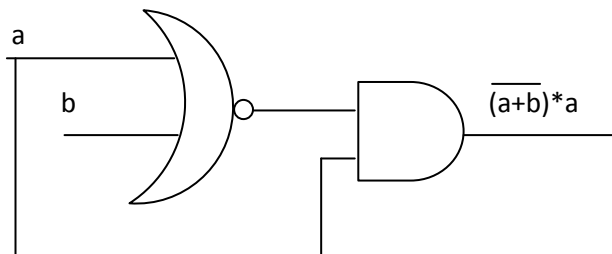
2.4 Exercice de logique

1. Simplifier les équations suivantes :

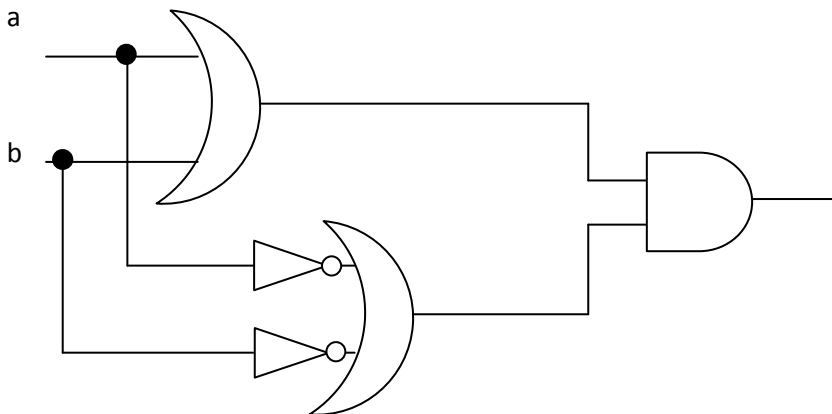
- $(a \oplus b)a$



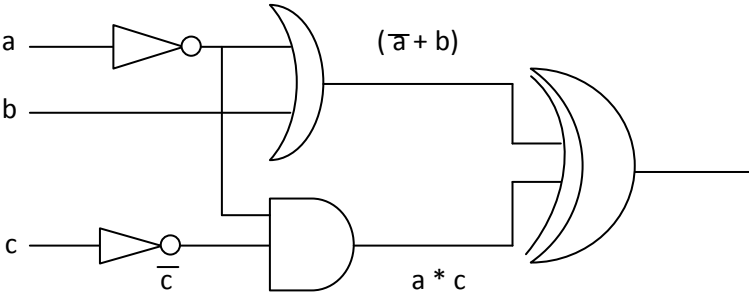
- $\overline{(a+b)} * a$



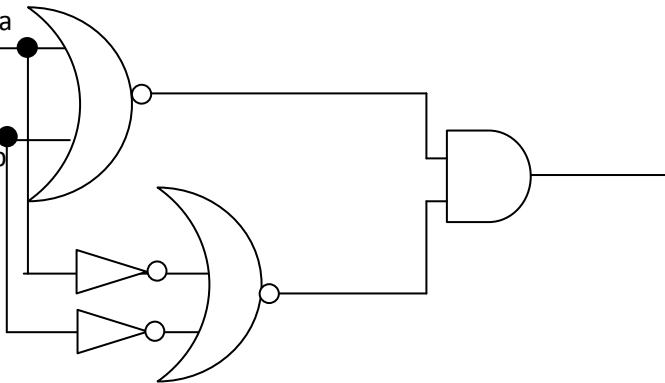
- $(a+b) * (\overline{a+b})$



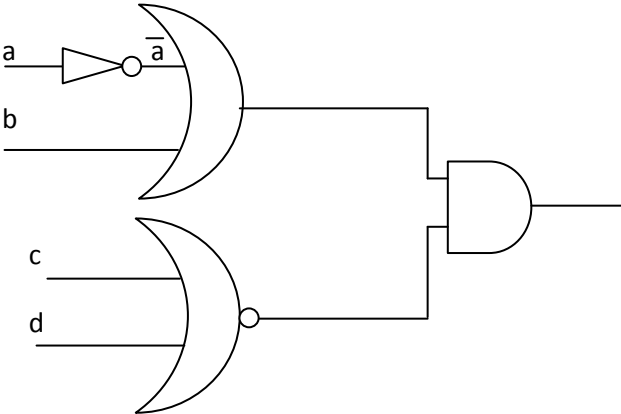
- $(\bar{a} + b) \oplus \bar{a} * \bar{c}$



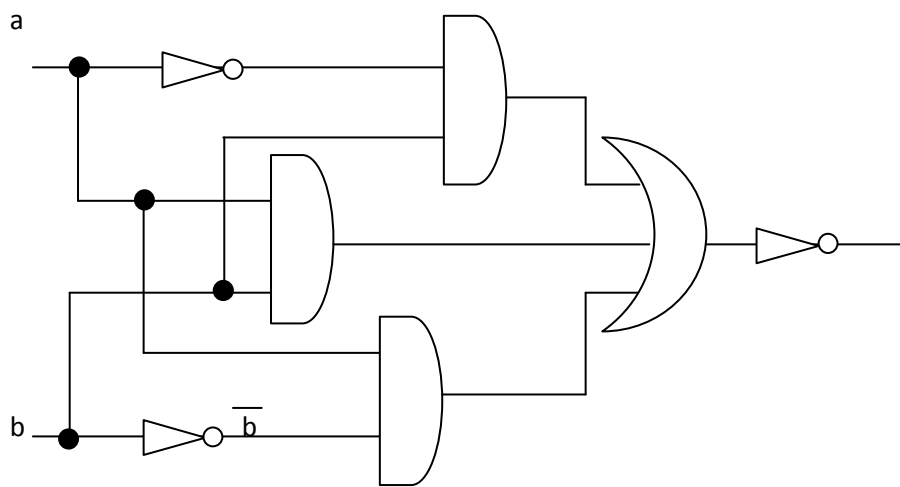
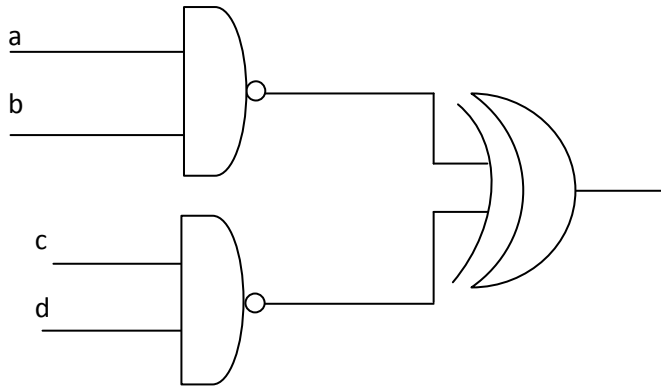
- $(\overline{\bar{a} + \bar{b}}) * (\overline{a + b})$



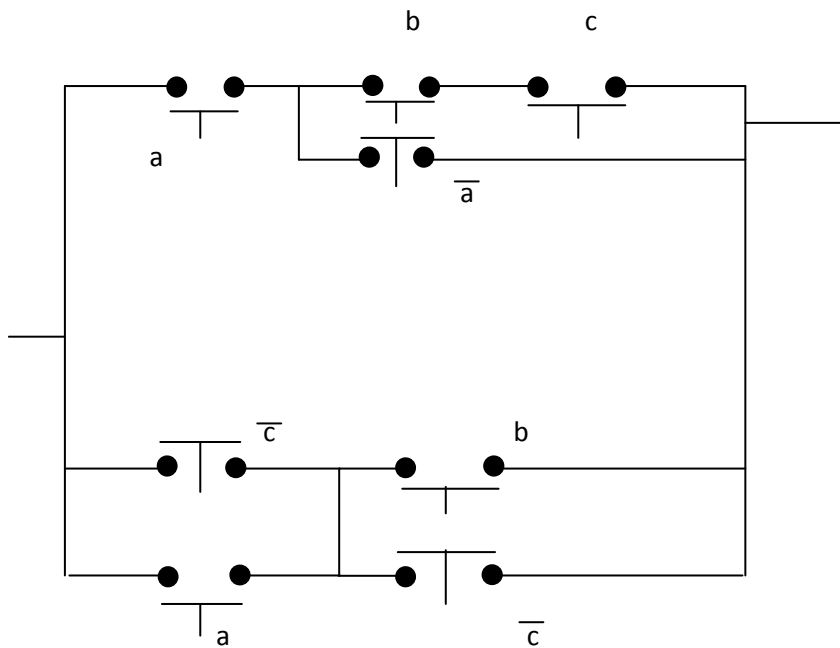
- $(\bar{a} + b) * (\bar{c} + d)$



- $\overline{(a * b)} \oplus \overline{(c * d)}$



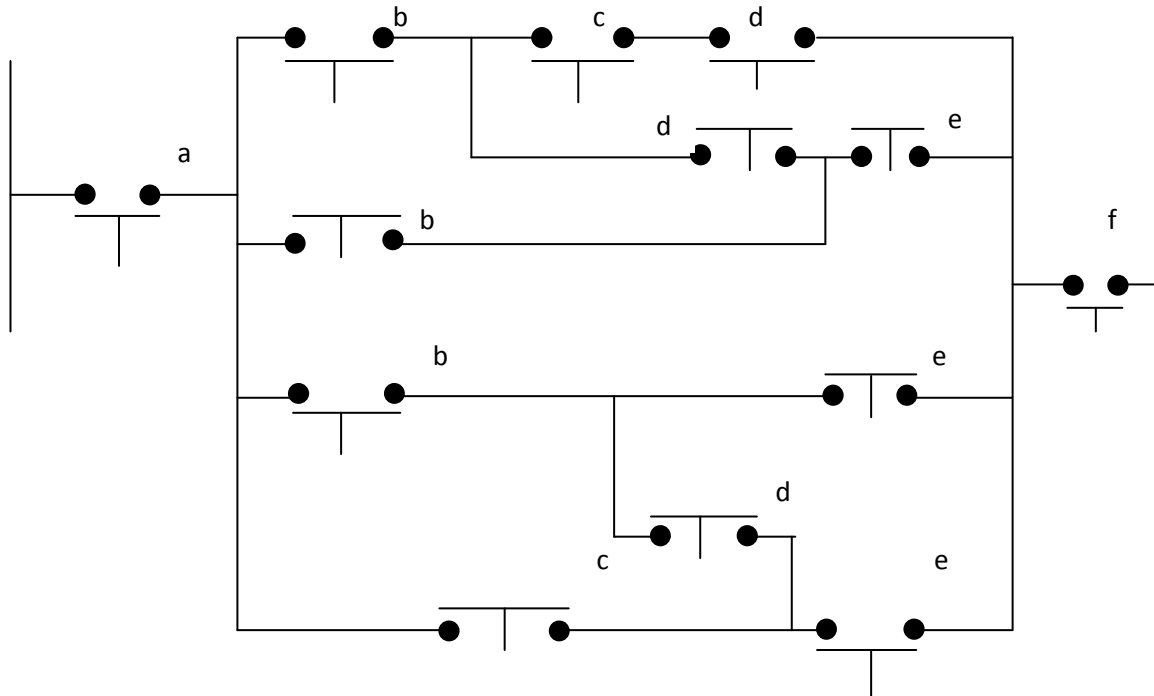
Rep : $\overline{(\bar{a} * b) + (a * b) + (a * \bar{b})}$



Rep : $(a * b * c) + (a * \bar{a}) + (\bar{c} * b) + (\bar{c} * c) + (a * \bar{c}) + (a * b)$

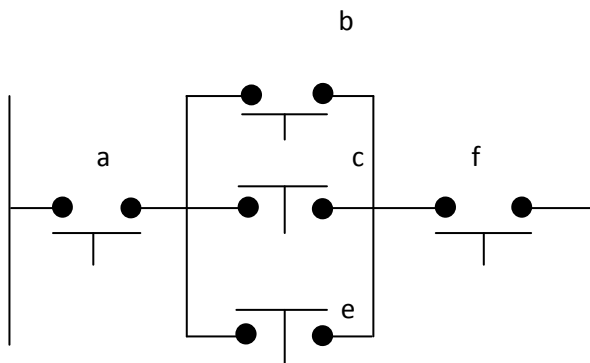
2. Exercices postulat et théorème :

Soit le schéma électrique suivant :



- Donner la représentation algébrique du schéma électrique
- Simplifier l'équation en vous basant sur les postulats et théorèmes
- Fournir le schéma électrique correspondant à l'équation simplifiée.

$$= bcd + b\bar{d}\bar{e} + \bar{b}d\bar{c}d + \bar{b}\bar{e} + \bar{b}e + b\bar{d}e + \bar{c}e + c\bar{d}\bar{e}$$



3. Simplifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 1) & (a \oplus b) * a \\
 & = (\bar{a} * b + a * \bar{b}) * a \\
 & = \bar{a}ab + aab \\
 & = \bar{a}b
 \end{aligned}$$

le OU exclusif
distribution
 $\bar{a} * a = 0 ; a * a = a$

$$\begin{aligned}
 2) & \overline{(a + b)} * a \\
 & = (\bar{a} * \bar{b}) * a \\
 & = (\bar{a}a) * \bar{b} = 0
 \end{aligned}$$

Loi de De Morgan
distribution
 $\bar{a} * a = 0$

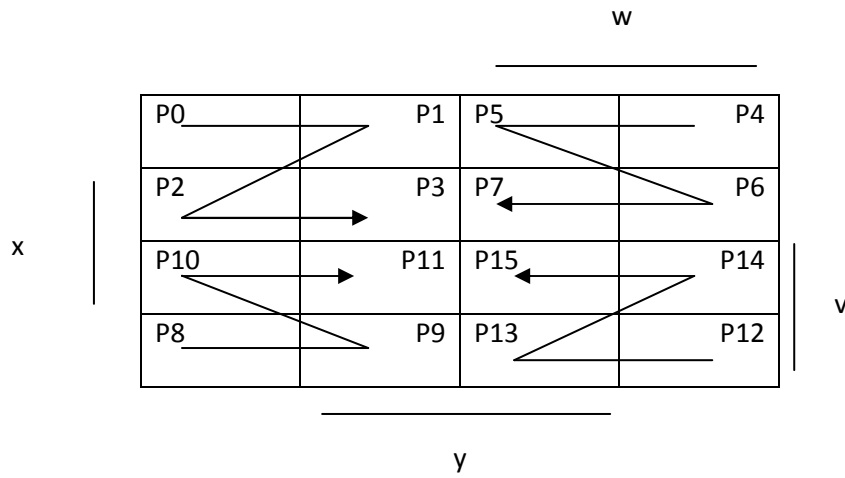
$$\begin{aligned}
 3) & (a + b) * (\bar{a} + \bar{b}) \\
 & = (a * \bar{a} + b * \bar{a}) + (a * \bar{b} + \bar{b} * b) \\
 & = b\bar{a} + ab
 \end{aligned}$$

distribution
 $\bar{a} * a = 0 ; \bar{b} * b = 0$

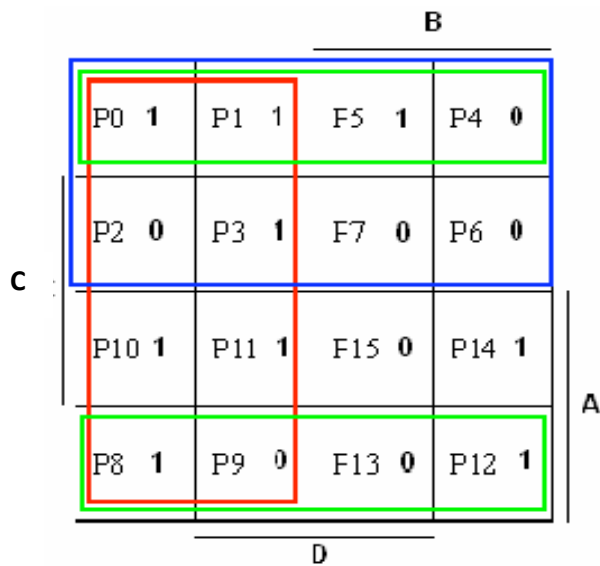
$$\begin{aligned}
 4) & \overline{(a + b)} \oplus \bar{a} * \bar{c} \\
 & = \overline{(a + b)} * (\bar{a} * \bar{c}) + (\bar{a} + b) * \overline{(\bar{a} * \bar{c})} \\
 & = (a * \bar{b}) * \bar{a} * \bar{c} + (\bar{a} + b) * (a + c) \\
 & = \bar{a} * a + \bar{a} * c + b * a + b * c \\
 & = \bar{a} * c + b * a + b * c
 \end{aligned}$$

le OU exclusif
loi d'involution
 $\bar{a} * a = 0$

Quatre variables → vwxy 16 cases (4*4)



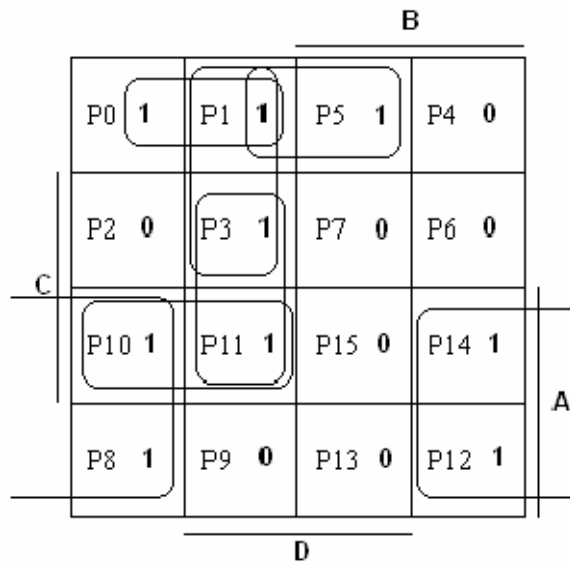
Exemples :



Groupe :

- 2 cases → une variable en moins
- 4 cases → deux variables en moins
- 8 cases → trois variables en moins
- 16 cases

- Cases comprenant « 1 »
- Cases voisines (coté commun)



IP Essentiels
 Non essentiels

Solution = IPE(s) + combinaison IPNE (pas tous)

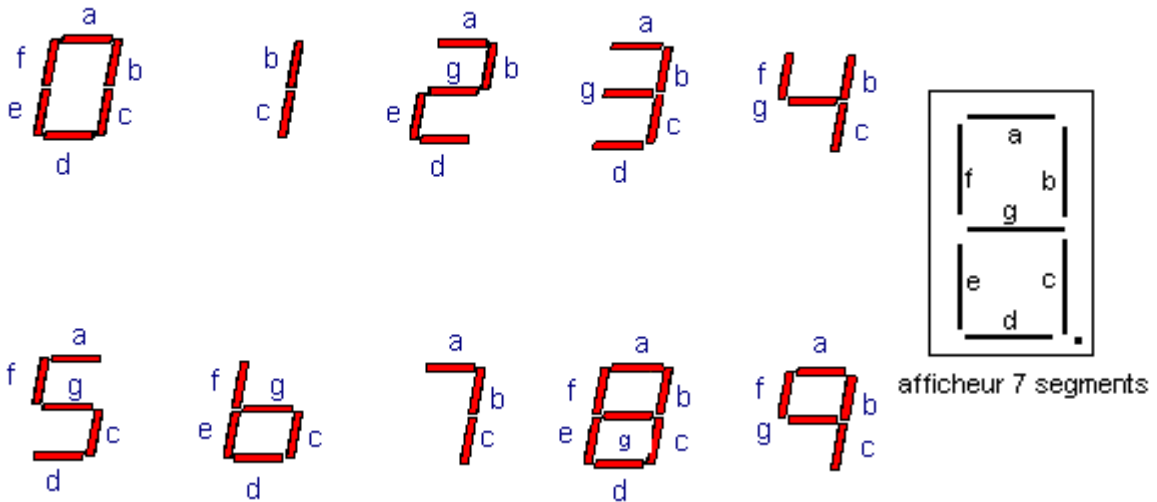
$$P1P5 + P8P10P12P14 + POP1 + P3P11$$

$$\overline{D}\overline{A}\overline{C} + \overline{A}\overline{D} + \overline{C}\overline{D}\overline{B} + \overline{B}\overline{C}\overline{A}$$

- P0P1 → IPNE
- P1P5 → IPE
- P1P3 → IPNE
- P3P11 → IPNE
- P0P8 → IPNE
- P10P1 → IPNE
- P8P10P12P14 → IPE

3. Les fonctions combinatoires

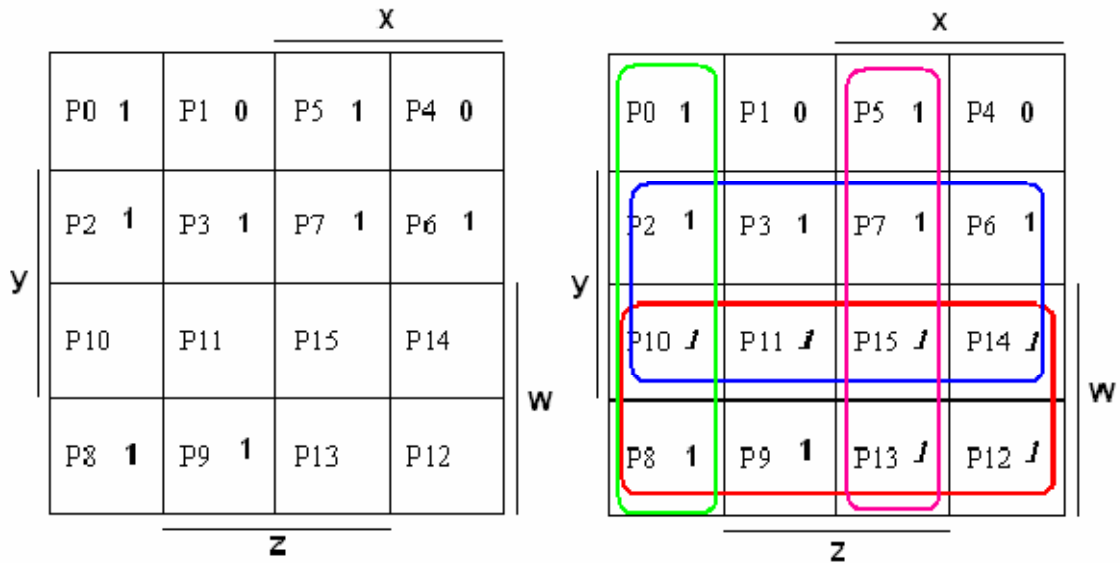
3.1 L'afficheur 7 segments



Nous pouvons établir la table de vérité suivante :

Entrée				Sortie						
w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	G
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

3.1.1 Segment a

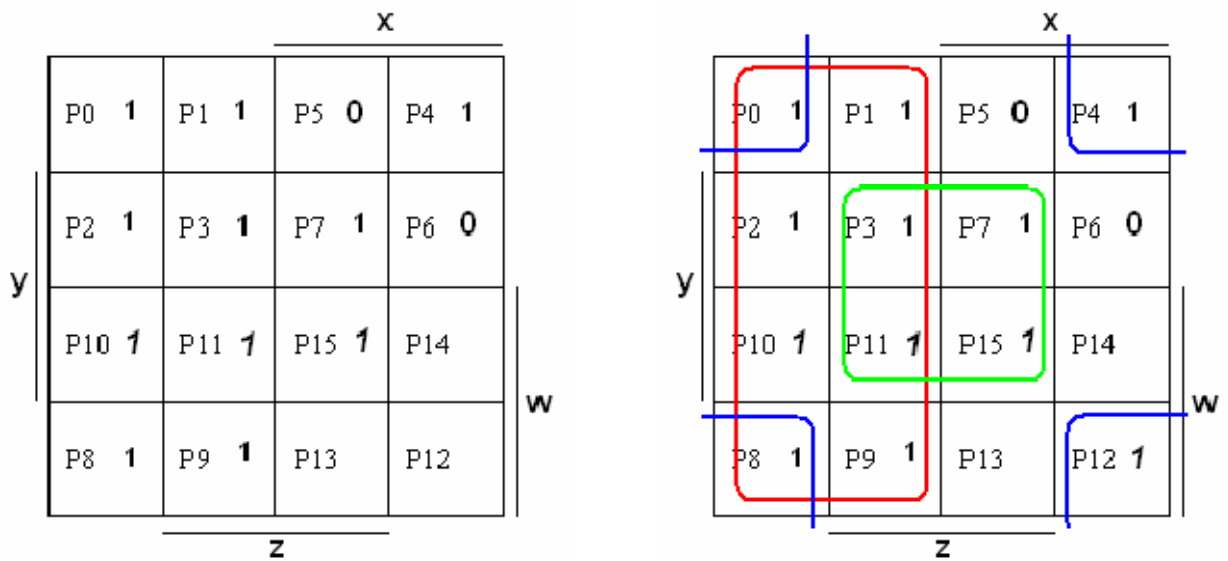


Les différents regroupements auront donc comme équation :

- P8 P9 P10 P11 P12 P13 P14 P15 : w
- P2 P3 P6 P7 P10 P11 P14 P15 : y
- P0 P2 P10 P8 : \overline{zx}
- P5 P7 P15 P13 : xz

Ce qui donnera comme équation finale : $w + y + \overline{zx} + xz$

3.1.2 Segment b

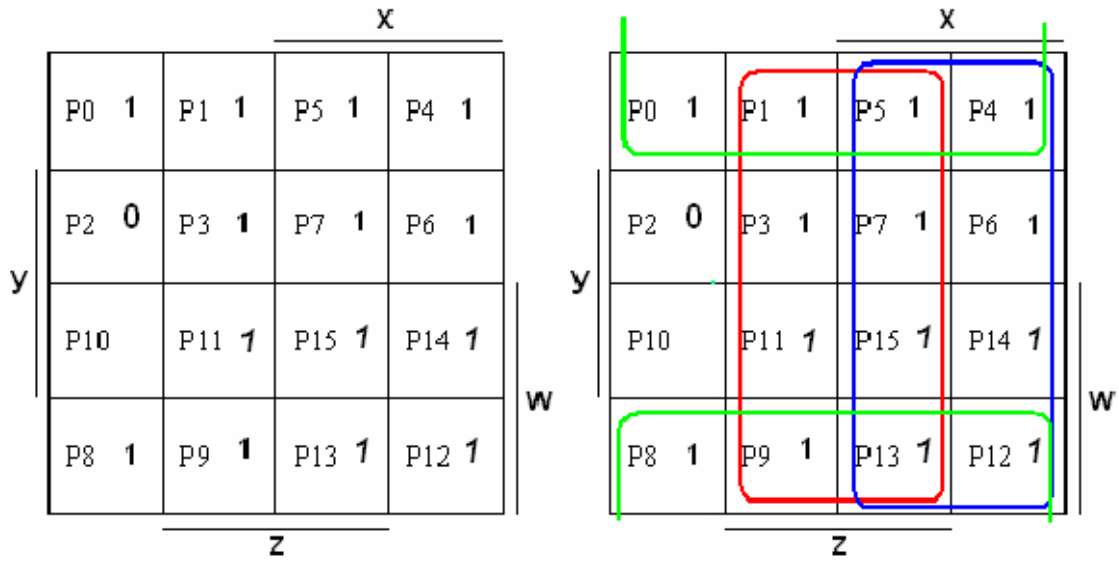


Les différents regroupements auront donc comme équation :

$$\begin{aligned}
 &P0 P1 P2 P3 P8 P9 P10 P11 : \bar{x} \\
 &P3 P7 P11 P15 : yz \\
 &P0 P4 P8 P12 : \bar{y}\bar{z}
 \end{aligned}$$

Ce qui donnera comme équation finale : $\bar{x} + yz + \bar{y}\bar{z}$

3.1.3 Segment c

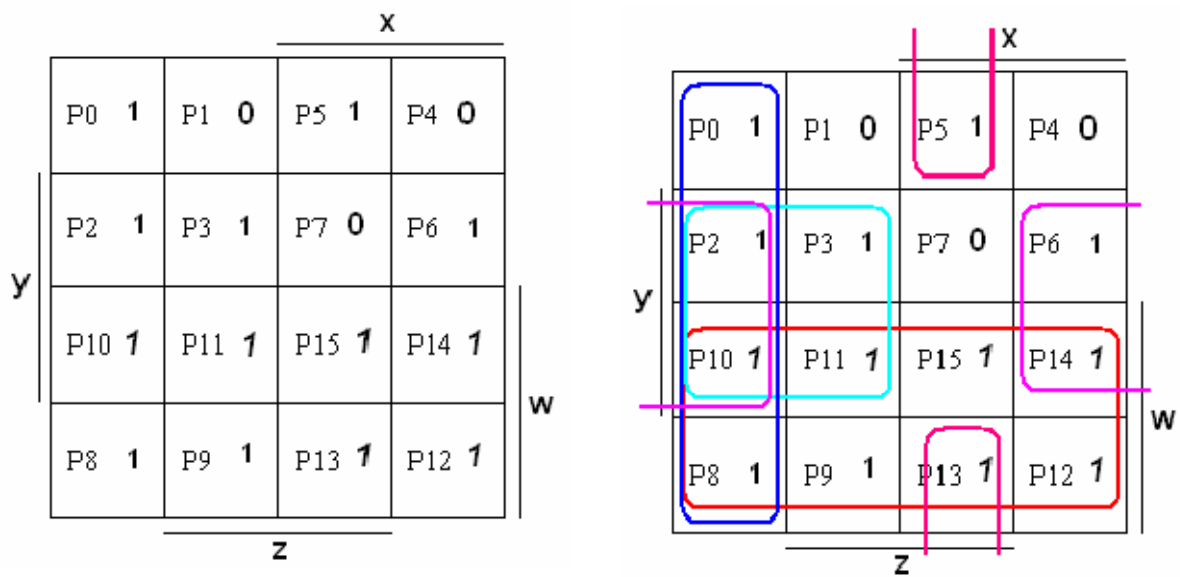


Les différents regroupements auront donc comme équation :

$$\begin{aligned}
 &P1 P3 P5 P7 P11 P15 P9 P13 : z \\
 &P0 P1 P4 P5 P8 P9 P12 P13 : \bar{y} \\
 &P4 P5 P6 P7 P14 P15 P12 P13 : x
 \end{aligned}$$

Ce qui donnera comme équation finale : $\bar{y} + z + x$

3.1.4 Segment d

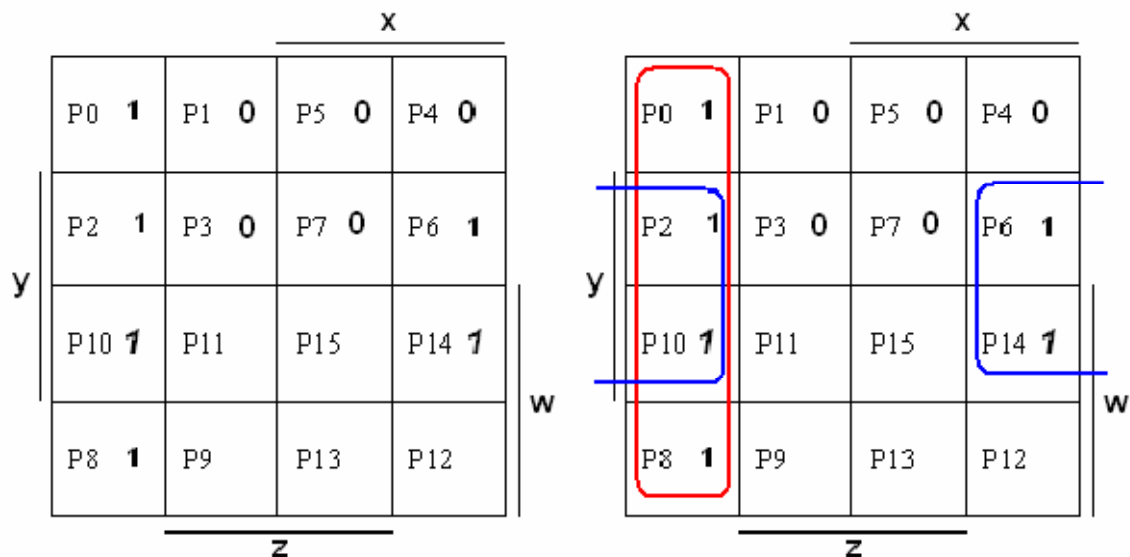


Les différents regroupements auront donc comme équation :

- P0 P2 P10 P8 : $\bar{z}\bar{x}$
- P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
- P2 P3 P10 P11 : $\bar{y}\bar{x}$
- P2 P10 P6 P14 : $\bar{y}\bar{z}$
- P5 P13 : $xz\bar{y}$

Ce qui donnera comme équation finale : $\bar{z}\bar{x} + w + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}\bar{z} + xz\bar{y}$

3.1.5 Segment e

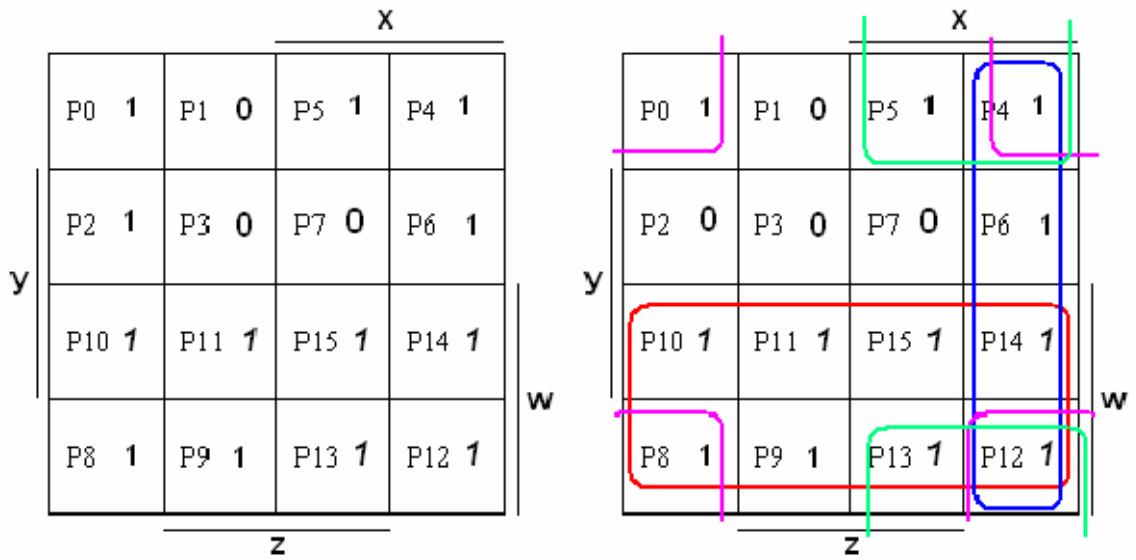


Les différents regroupements auront donc comme équation :

- P0 P2 P10 P8 : $\bar{z}\bar{x}$
- P2 P10 P6 P14 : $\bar{z}y$

Ce qui donnera comme équation finale : $\bar{z}\bar{x} + \bar{z}y$

3.1.6 Segment f

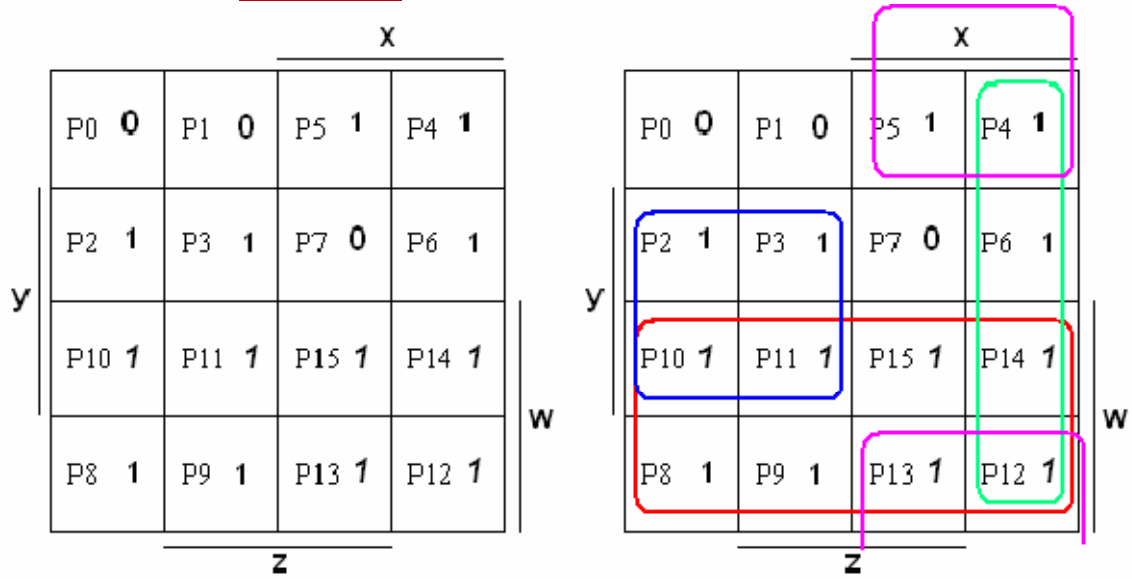


Les différents regroupements auront donc comme équation :

- P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
- P4 P6 P14 P12 : $\bar{x}\bar{z}$
- P5 P4 P13 P12 : $\bar{y}x$
- P0 P4 P8 P12 : $\bar{y}\bar{z}$

Ce qui donnera comme équation finale : $w + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}x + \bar{y}\bar{z}$

3.1.7 Segment g

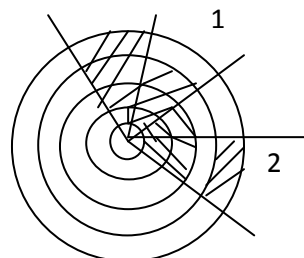
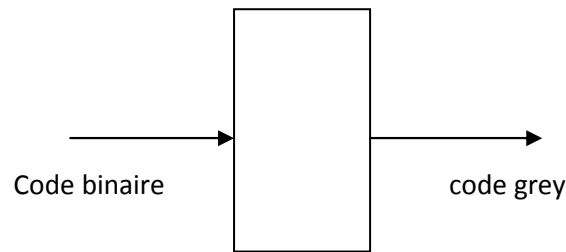


Les différents regroupements auront donc comme équation :

- P10 P11 P15 P14 P8 P9 P13 P12 : w
- P4 P6 P14 P12 : $\bar{x}z$
- P2 P3 P10 P11 : $\bar{y}x$
- P5 P4 P13 P12 : $\bar{y}x$

Ce qui donnera comme équation finale : $w + \bar{x}z + \bar{y}x + \bar{y}x$

3.2 Le code gray.



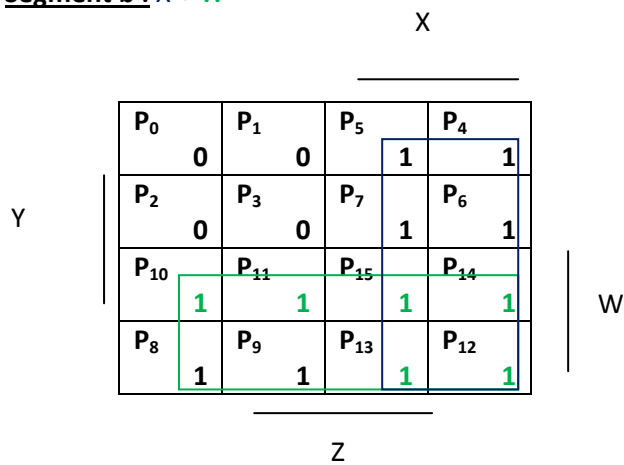
- 1 → 0
- 0 → 1
- 0 → 1
- 0 → 0

Du code binaire naturel au code gray :

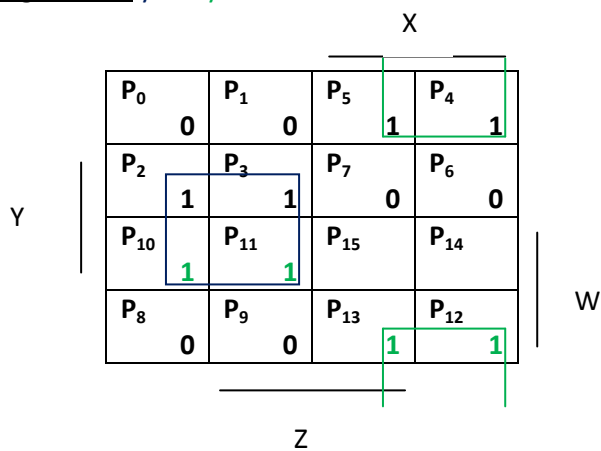
Entrées				Sorties			
w	x	y	z	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1

On ne s'attardera que sur 2 sorties : la b et c

Segment b : $X + W$



Segment c : $\bar{y}x + x\bar{y}$

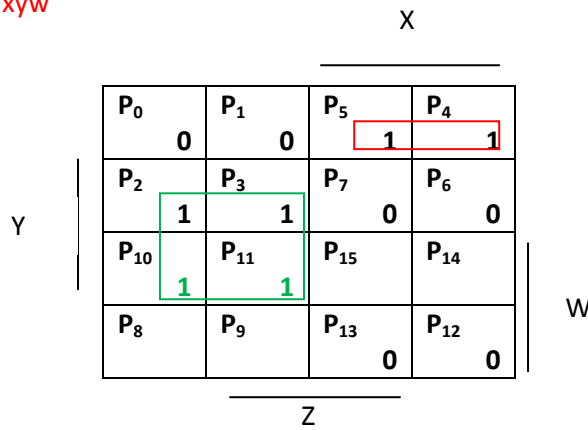


Code gray en binaire :

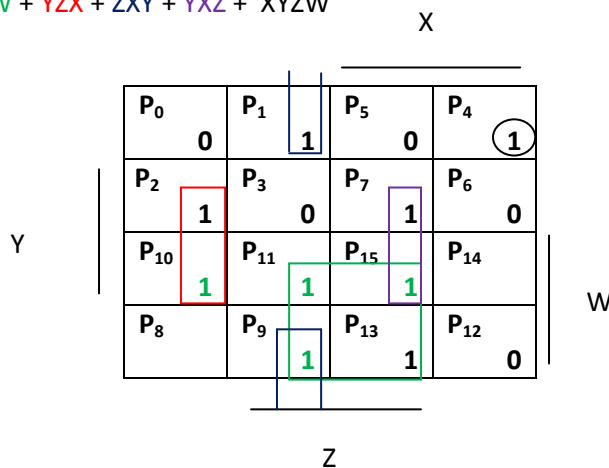
Entrées					Sorties			
	w	x	y	z	a	b	c	d
P0	0	0	0	0	0	0	0	0
P1	0	0	0	1	0	0	0	1
P3	0	0	1	1	0	0	1	0
P2	0	0	1	0	0	0	1	1
P6	0	1	1	0	0	1	0	0
P7	0	1	1	1	0	1	0	1
P5	0	1	0	1	0	1	1	0
P4	0	1	0	0	0	1	1	1
P12	1	1	0	0	1	0	0	0
P13	1	1	0	1	1	0	0	1

On ne fera que 2 segments : le c et le d.

Segment c : $\bar{y}x + x\bar{y}w$



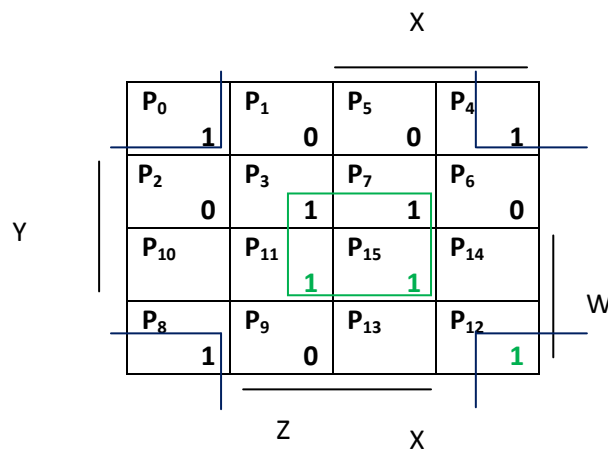
Segment d : $ZW + \bar{Y}Z\bar{X} + \bar{Z}\bar{X}Y + YXZ + \bar{X}\bar{Y}Z\bar{W}$



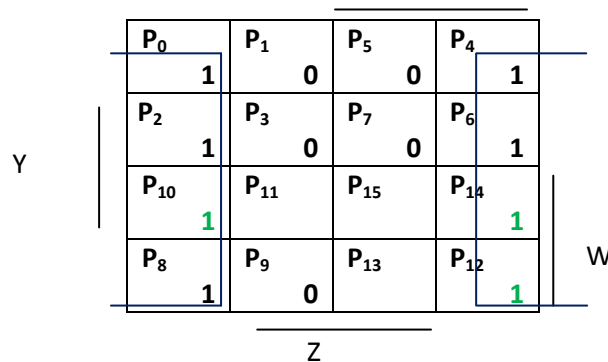
3.3 Le code majoré de trois.

Entrées				Sorties			
w	x	y	z	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0

Segment c : $yz + \bar{y}z$



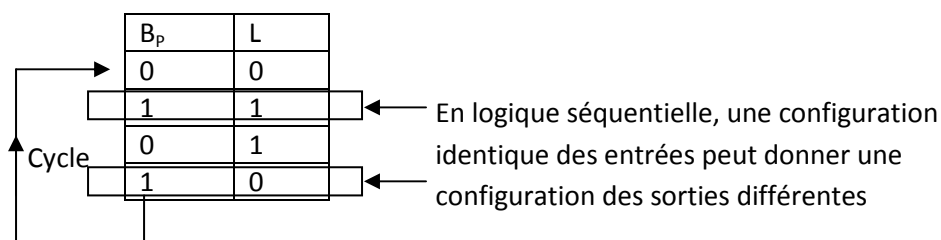
Segment d : \bar{z}



4. Logique séquentielle

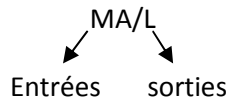


a) Exercice 1 :



Afin de bien comprendre le mécanisme, nous allons prendre l'exemple d'un circuit marche/arrêt avec arrêt prioritaire.

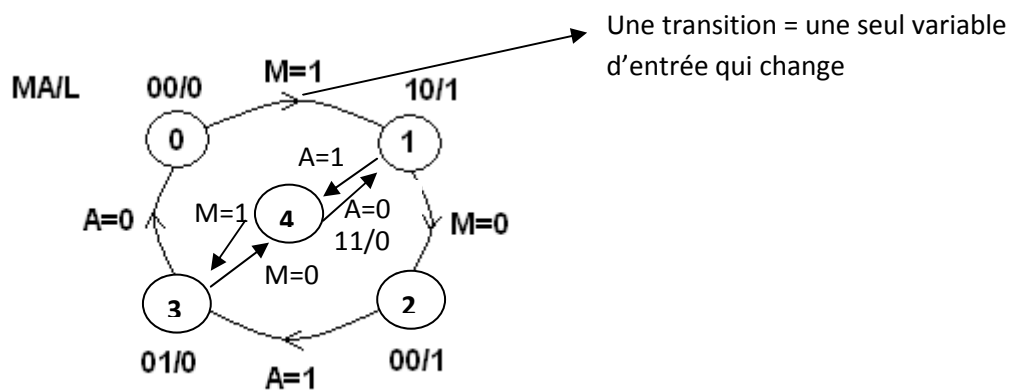
Soit M le bouton poussoir marche, A le bouton poussoir pour l'arrêt et L la lampe qui doit être commandée.



Initialement, la lampe est éteinte et les boutons poussoirs ne sont pas enfoncés. Il s'agit de l'étape initiale appelée aussi phase initiale. Ces phases sont numérotées et la phase initiale porte le numéro zéro.

Phase stable : stabilité au niveau des sorties

1) Graphe des séquences



2) Tables des phases incomplètes

MA	00	01	10	11	L
①	①				0
②			②		1
③	③				1
④		④			0
⑤				⑤	0

3) Tables des phases complètes.

MA	00	01	10	11	L
①	①		1		0
②	2		②	4	1
③	③	3			1
④	0	④		4	0
⑤		3	1	⑤	0

Complète = incomplète + transition

Transition : ligne de la phase de départ et la colonne de la phase d'arrivée

4) Fusion

MA	00	01	10	11	L
① ④ ③	①	③	1	④	0
② ⑤	②	3	②	4	1

5) Choix des variables auxiliaires

2 lignes → 1 variable

3 lignes → 2 variables

4 lignes → 2 variables

5 lignes → 3 variables

6) Assignment

I	MA	00	01	10	11	L
0	① ④ ③	① ⁰	③ ⁰	1 ¹	④ ⁰	0
1	① ②	② ¹	3 ⁰	① ¹	4 ⁰	1

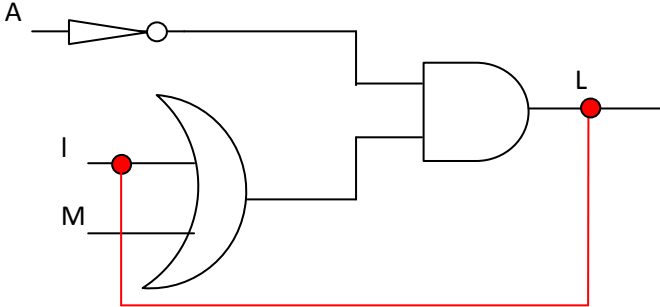
7) Table de karnaught

1 sortie = 1 table de Karnaught

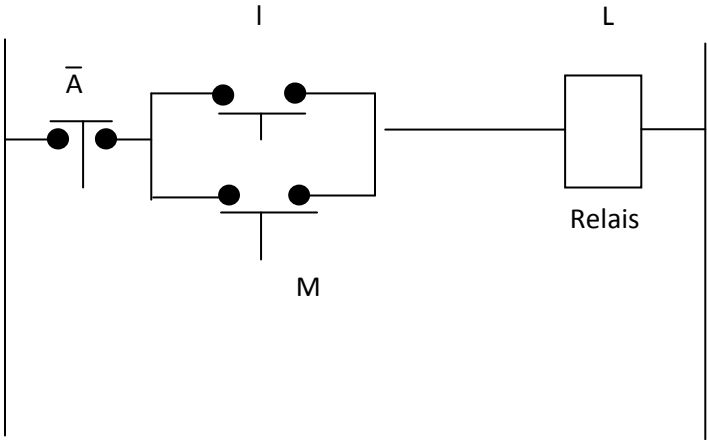
		I			
		P0	P1	P5	P4
		0	0	0	1
M		P2	P3	P7	P6
		1	0	0	1
		A			

$$\overline{I} \overline{A} + M \overline{A} = \overline{A} (I+M)$$

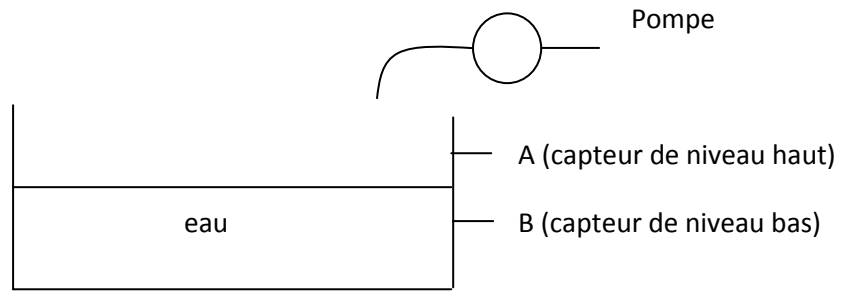
8) Schéma logique



9) Schéma électronique



b) Exercice 2 : Château d'eau



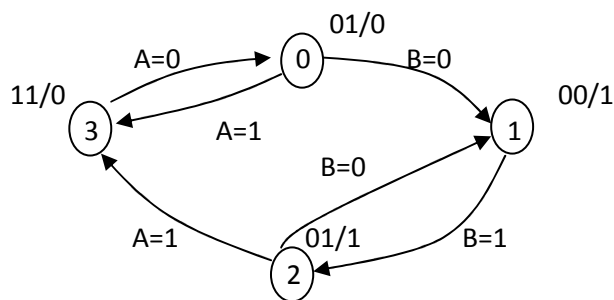
S'il y a de l'eau au niveau d'un capteur, celui aura la valeur logique 1

S'il n'y a pas d'eau → niveau logique 0

Pompe à l'arrêt → 0 pompe enclenchée → 1

1) Le graphe des séquences

AB/P



2) Tables des phases

AB	00	01	10	11	P
0	1	0		3	0
1	1	2			1
2	1	2		3	1
3		0		3	0

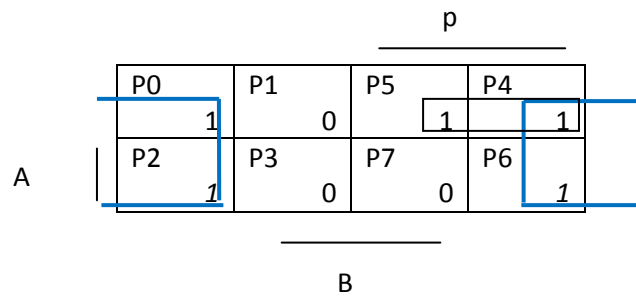
3) Fusion

p	AB	00	01	10	11	P
1	(1) (2)	¹ (1) P4	¹ (2) P5		⁰ 3 P7	1
0	(0) (3)	¹ 1 P0	⁰ (0) P1		⁰ (3) P3	0

Toutes les entrées doivent être à zéro pour le P0

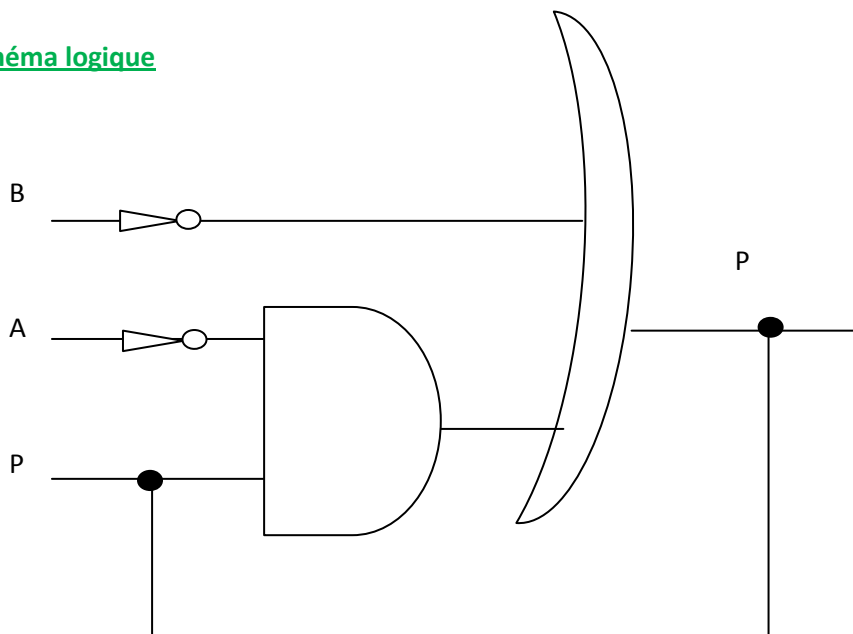
P4 → 100 ; PAB → 100

4) Karnaugh

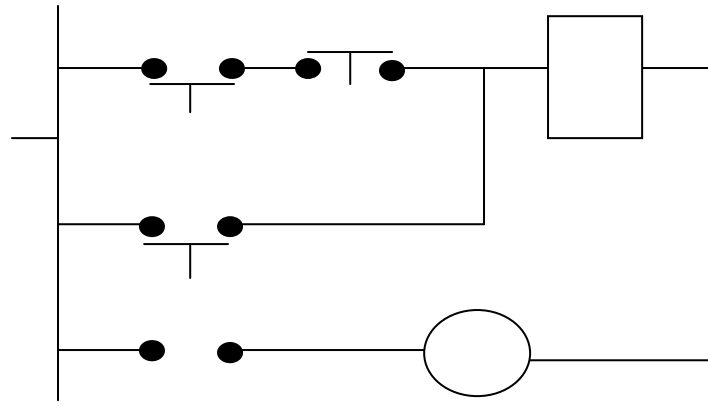


$$\bar{B} + P\bar{A}$$

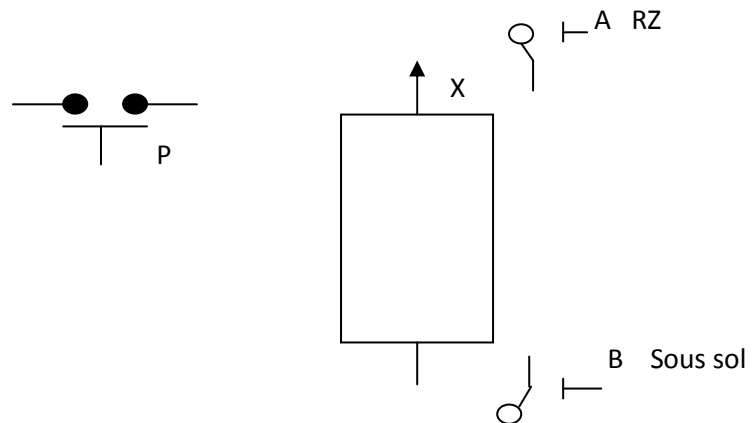
5) Schéma logique



6) Schéma électrique



c) Exercice 3 : le passe plat



X sortie correspond à la montée du passe plat

X=1 le PP monte

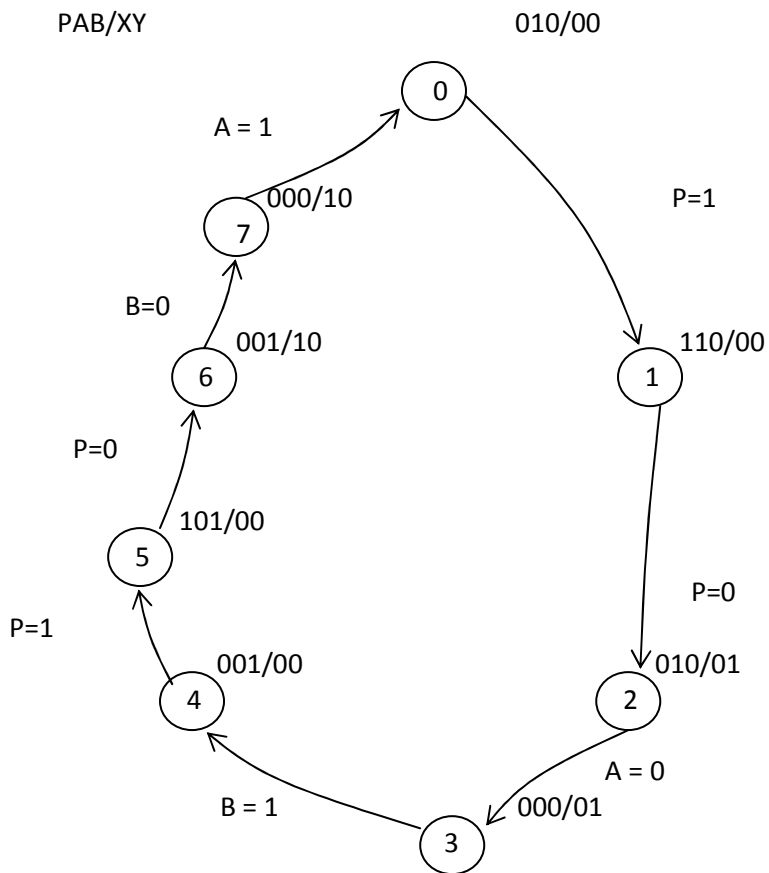
X = 0 le PP ne monte pas

Y sortie correspond à la descente du PP

Y = 1 le PP descend

Y = 0 le PP ne descend pas

1) Le graphe des séquences



2) La table des phases

PAB	000	001	010	011	100	101	110	111	XY
0			0				1		00
1			2				1		00
2	3		2						01
3	3	4							01
4		4				5			00
5		6				5			00
6	7	6							10
7	7		0						10

3) Fusion

PAB	000	001	010	011	100	101	110	111	XY
0 5		6	0			5	1		00
2 3	3	4	2						01
6 7	7	6	0						10
1 4		4	2			5	1		00

MNPAB

	B				M				
	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	
		0	0				0	0	
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈	A
	0			0				0	
N	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆	
	1			0				1	
	P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄	
	1	0	0				0	1	
	P								

$$Y = \overline{P} \ N \ \overline{B}$$

N

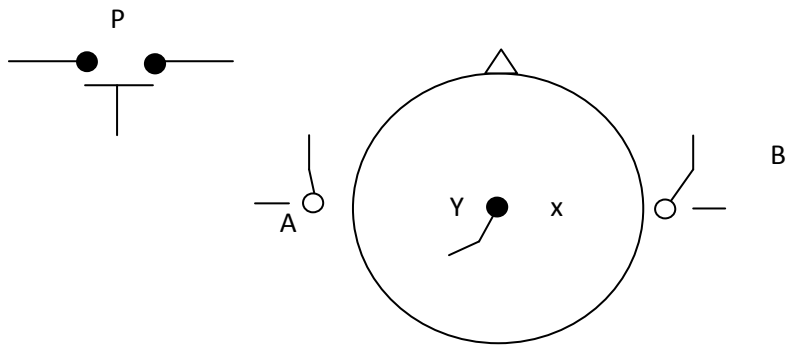
MNPAB

	B				M				
	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	
		0	0				0	0	
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈	A
	0		1	1	1	1		0	
N	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆	
	1	1	1	1	1	1		1	
	P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄	
	1	1	0				0	1	
	P								

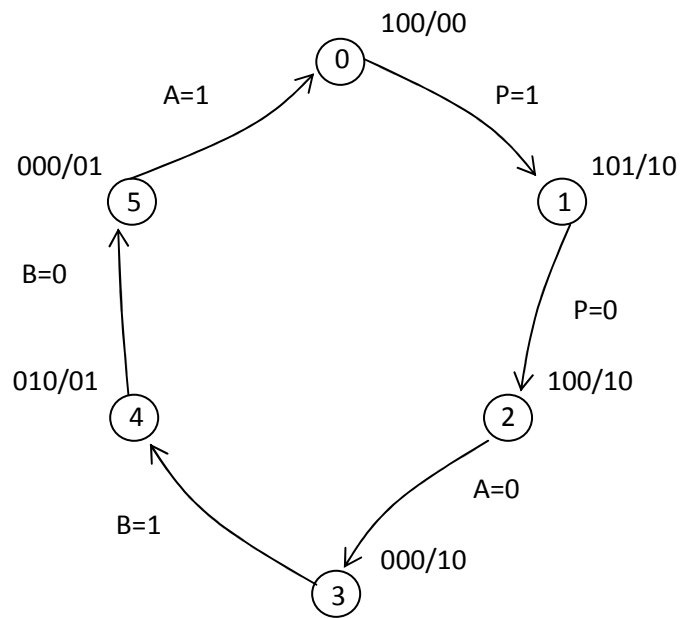
$$N = \overline{NPM} + PA + \overline{PBN}$$

On ne fait pas la table pour M car cette variable ne revient pas dans les équations de X et Y. Si elle revient dans l'équation de N, on devrait la faire.

d) Exercice 4 : le va et vient.



1) Le graphe des séquences



2) La table des phases complètes et incomplètes.

PAB	000	001	010	011	100	101	110	111	XY
0					0	1			00
1		2'			2	1			10
2	3				2				10
2'	3	2'							10
3	3		4						10
4	5		4						01
5	5				0				01

3) Fusion et assignement

XY	ABP	000	001	010	011	100	101	110	111	XY
10	1 2 2' 3	10 3	10 2	00 4		10 2	10 1			10
01	4 5	01 5		01 4		00 0				01
00	0			01 X		00 0	10 1			00
11				X						11

X : 1^{ère} solution

X : 2^{ème} solution → attention on essaie de commander x et y en même temps cela peut poser des problèmes

Phase instable : cela représente les sorties que l'on souhaiterait avoir

Phase stable : cela représente les sorties que l'on a.

4) Tables de Karnaugh

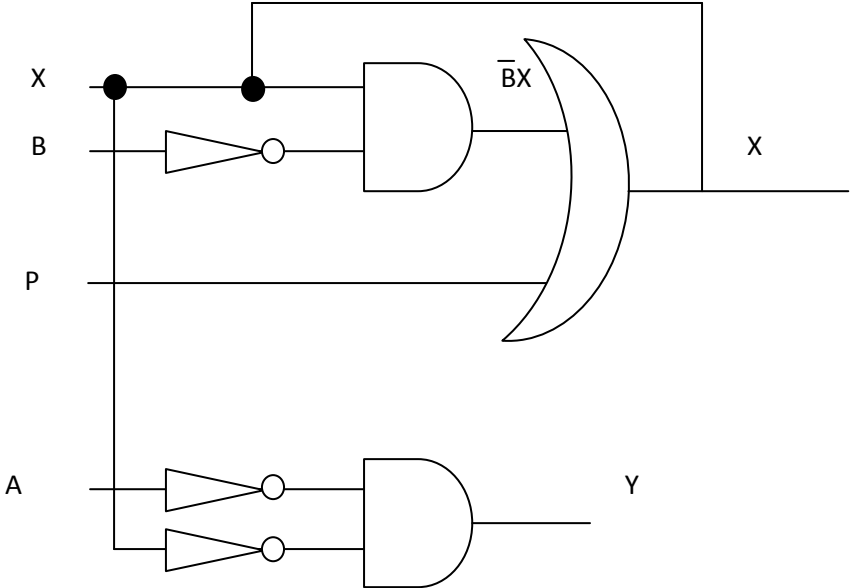
$X = \overline{B}X + P$

		P				X			
		P		X		P		X	
Y	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	B
		1	1	0	1	1	1	1	
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈	
	0	1	1			1	1	0	
P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆		
	1	1			1	1	1		
P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄		
0	1	1	0	1	1	1	1		
		A							

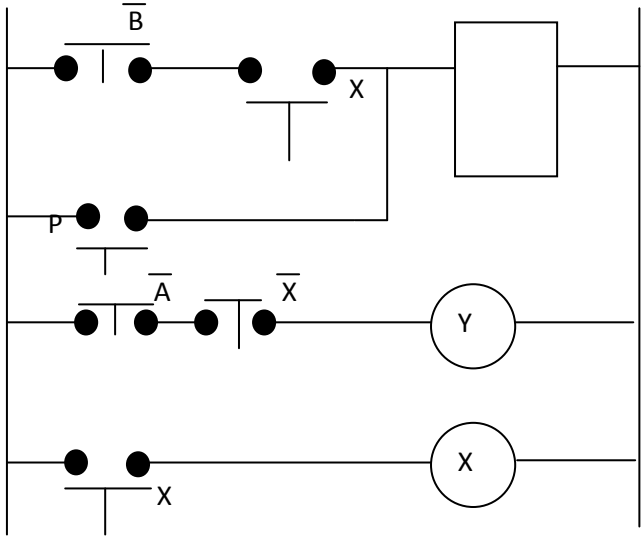
$Y = \overline{A} \overline{X}$

		P				X			
		P		X		P		X	
Y	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	B
		1	1	0	0	0	0	0	
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈	
		1	1					0	
P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆		
	1	1							
P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄		
	1	1							
		A							

5) Schéma logique

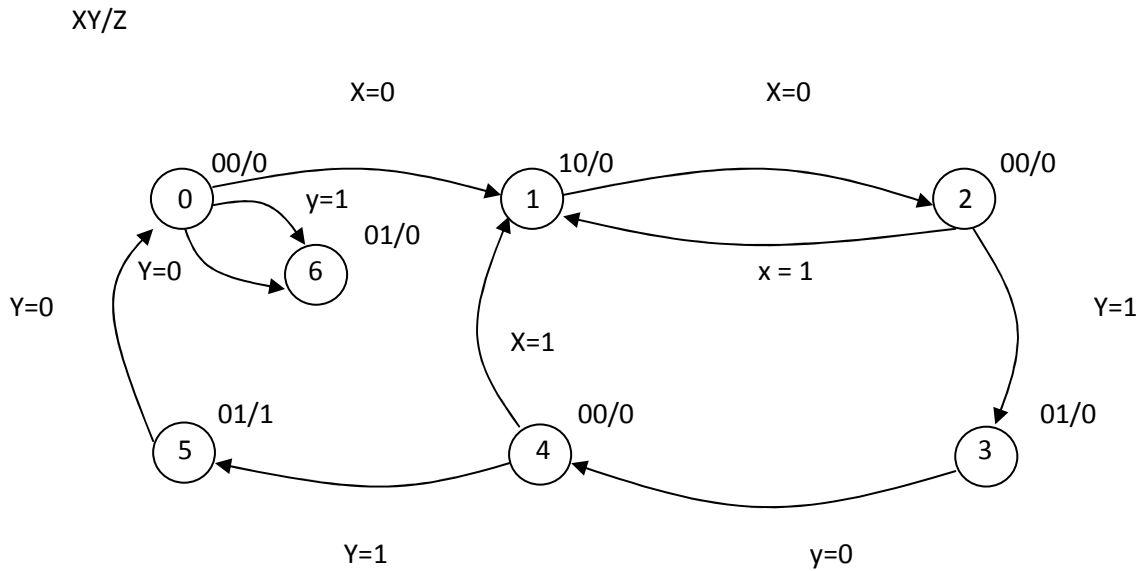


6) Schéma électrique



e) Exercice 5 :

1) Le graphe des séquences



2) Tables des phases incomplètes et complètes

XY	00	01	10	11	Z
0	0	6	1		0
1	2		1		0
2	2	3	1		0
3	4	3			0
4	4	5	1		0
5	0	5			1
6	0	6			0

3) **Fusion**

XY	00	01	10	11	Z
0 6	0	6	1		0
1 2	2	3	1		0
3	4	3			0
4	4	5	1		0
5	0	5			1

4) **Assignment**

MLZ	XY	00	01	10	11	Z	ML
010	0 6	⁰⁰¹ 2	⁰¹¹ 3	⁰⁰¹ 1		0	01
000	1 2	⁰⁰⁰ 0	⁰⁰⁰ 6	⁰⁰¹ 1		0	00
110	3	⁰¹⁰ 4	⁰¹¹ 3	⁰⁰¹ X		0	11
100	4	⁰¹⁰ 4	¹¹⁰ 5	⁰¹¹ 1		0	10
001	5	⁰⁰⁰ 0	¹⁰⁰ 5			1	00
101			¹⁰⁰ X			1	10

Choix variables auxiliaire : on compte les lignes que l'on a dans la fusion et en fonction on choisit le nombre de variables donc ici 5 lignes = 3 variables auxiliaire

5) Tables de Karnaught
MLZXY

		Y				M				
		Y		M		Y		M		
L	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	X	
	0	0	1	0	0	1	1	0		
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈		
	0		1			1	1	0		
P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆			
0		1			1		0			
P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄			
0	0	1			1	0	0			
		Z								

$Z = \overline{M}LY + YZ$

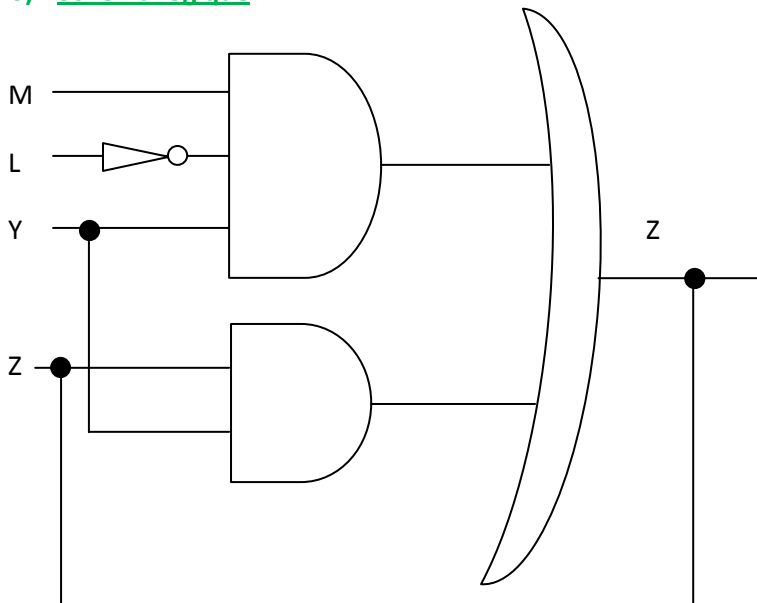
		Y				M				
		Y		M		Y		M		
L	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	X	
	0	0	0	0	0	0	1	1		
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈		
	0						1	1		
P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆			
0	1	1			1	1	0			
P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄			
0	1	1			1	1	1			
		Z								

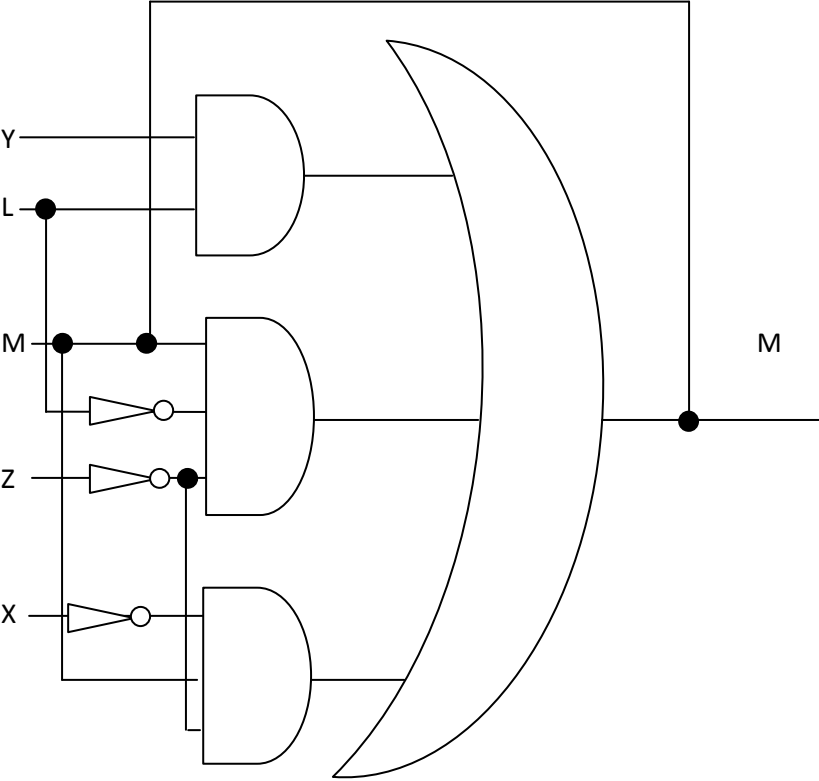
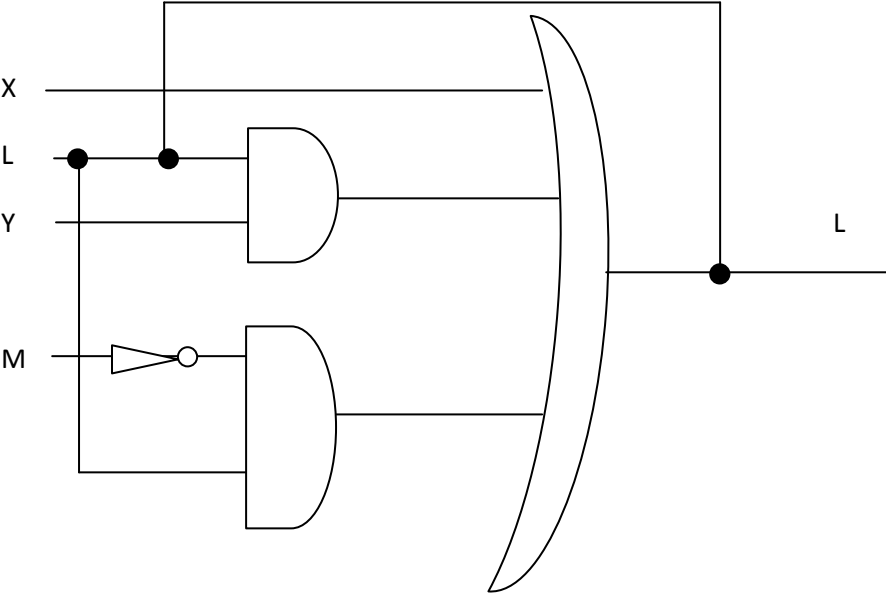
$M = \overline{M}Z\overline{L} + LY + \overline{M}Z\overline{X}$

	Y				M				
	P ₀	P ₁	P ₅	P ₄	P ₂₀	P ₂₁	P ₁₇	P ₁₆	
	0	0	0			0	0	0	
	P ₂	P ₃	P ₇	P ₆	P ₂₂	P ₂₃	P ₁₉	P ₁₈	X
	1							1	
L	P ₁₀	P ₁₁	P ₁₅	P ₁₄	P ₃₀	P ₃₁	P ₂₇	P ₂₆	
	1	1	1	1		1	1	1	
	P ₈	P ₉	P ₁₃	P ₁₂	P ₂₈	P ₂₉	P ₂₅	P ₂₄	
	1	1	1	1		1	1	0	
	Z								

$$L = X + LY + \overline{LM}$$

6) Schéma logique





7) Schéma électrique

