Mathématiques

1er Technologies
informatique
thermique

Objectifs du cours de mathématiques (1er semestre)

BLOC-1

1e-Appliquer les formules trigonométriques (les triangles , les identités , les problèmes , les polaires)
2e-Construire le graphe d'une circulaire (approche globale)
3e-Appliquer l'ajustement exponentiel (les problèmes , les tabulations)
4e-Construire le graphe d'une exponentielle (approche globale)
5e-Determiner les constante de temps et période d'une exponentielle décroissante
6e-Construire la logarithmique
7e-Réduire logarithmiquement (l'évaluation , les échelles)
8e-Les grandeurs complexes (toutes formes)
9e-Les applications électriques (l'impédance ohmique , le facteur de puissance)

BLOC-2

10e-L'équivalence locale
11e-La recherche d'une racine d'une numérique
12e-Vérifier une équation différentielle
13e-Etablir le graphe d'une fonction électrique par les critères du1er ordre
14e-Fixer les valeurs optimales d'un problème sous une contrainte
15e-La différentielle (l'accroissement , le taux de variation , l'estimation d'erreur)
16e-Les analytiques (la recherche , le niveau d'erreur , l'évaluation numérique)

Cours de mathématiques

1ère année informatique , 3 périodes /semaine
1ère année thermique , 4 périodes /semaine

(Les programmes sont disponibles au secrétariat de l'école)

1–Les compétences visées
a– le contexte: l'adaptation des programmes du secondaire et de certaines candidatures à une orientation technique d'un cycle court , le développement d'utilitaires pour les options spécifiques ;
b– l'axe disciplinaire: la construction d'une alphabétisation mathématique axée sur l'analyse mathématique classique (au premier semestre) et les équations aux variations (au second semestre)
c– l'axe pluridisciplinaire: l'articulation des pôles mathématiques et technologiques.

2–Les capacités requises
Une certification issue du secondaire supérieur dans une filière mathématique d'au moins 4h/sem .
(Les candidats issus d'une 7e B peuvent réussir ce cours pour autant que , préalablement , ils intègrent individuellement un programme de remédiation proposé dans le manuel " Calcul différentiel et intégral –manuel programmé–" de Kleppner et Ramsey aux éditions DeBoeck)

3–Les matières
Partie 1 : l'analyse classique
–1–Les fonctions numériques (circulaires , exponentielles , logarithmiques , le cas complexe)
–2–Les propriétés du continu (l'équivalence locale , la dérivation , la différentielle et les analytiques)
–3–La primitivation (le cas Cauchy ,les techniques de recherche , la fonction intégrale)
Partie 2 : les équations aux variations
–4–Les équations intégrales (les mesures d'aire , de travail et de quantités électriques)
–5–Les équations différentielles (les autonomes , linéaires du 1er et 2d ordre)
–6–(TH) Les équations aux dérivées partielles (une fonction de plusieurs variables et sa dérivation , la différentielle totale ,la dérivation d'une composée , les cas du gradient et Laplace)
–6–(IN) Les équations récurrentes (les valeurs particulières d'une numérique , l'interpolation , l'intégration)

4–L'évaluation
–formative: P1a + P1b, P2a + P2b
–sommative: Janvier + Juin (+ Septembre)
–certificative: mesurer les capacités de restitution d'un volume de matière, d'application de principes mathématiques dans un contexte technologique et d'argumentation des choix théoriques;

5–La bibliographie
a–aux éditions Schaum : formulaire mathématique et équation différentielle
b–aux éditions Dunod : la série Mathématiques Supérieures de Quinet
c–aux éditions Masson : Cours de Mathématiques Supérieures de Thuillier
d–aux éditions Mir :Calcul différentiel et intégral de Piskounov et Smirnov
e–aux éditions DeBoeck Université : le Swokowski dans son livre Analyse .

Objectifs du cours de mathématiques (2d semestre)

BLOC-3

1er- Le problème de Cauchy
2d- Les techniques de primitivation L-S-R
3e- La primitivation par parties
4e- Le cas des expressions fractionnaires
5e- Le cas des circulaires
6e- la fonction intégrale
7e- L'évaluation du travail développé par une force
8e- La mesure des quantités électriques
9e- La résolution d'une équation autonome (problème)
10e- La résolution d'une équation linéaire (méthode générale)
11e- La résolution d'une équation linéaire (méthode du facteur intégrant)
12e- La résolution des équations de circuit du 1er ordre
13e- La résolution des problèmes newtoniens
14e- Le système oscillant libre (en particulier le RLC homogène)
15e- Le système oscillant forcé (en particulier le RLC complet)
16e- La résolution d'une équation du 2d ordre par la méthode complexe

BLOC-4

17e-(th) L'accroissement différentiel d'une fonction de plusieures variables
18e-(th) L'intégration d'une différentielle totale
19e-(th) La résolution des équations aux dérivées partielles classiques
20e-(th) La fonction gradient
21e-(in) L'interpolation au sens de Newton
22e-(in) L'interpolation au sens de Lagrange
23e-(in) La recherche des racines d'une fonction (dicho , Newton , le point fixe)
24e- La résolution d'un système linéaire
25e-(in) La triangulation d'une matrice

FORMULAIRE
pour le Baccalauréat

I. COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Card $(A \cup B)$ = Card A + Card B − Card $(A \cap B)$.
Card $(A \times B)$ = Card A Card B.

Soit E un ensemble de n éléments.

Nombre de permutations de E :
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$; $0! = 1$.

Nombre d'arrangements de p éléments de E :
$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$.

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$C_n^p = C_n^{n-p}$;

$C_{n-1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$; $P(A \mid B)$ se note aussi $P_B(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$.

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$.

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$.

Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

III. ALGÈBRE

A. Nombres complexes

Forme algébrique : $z = x + iy$

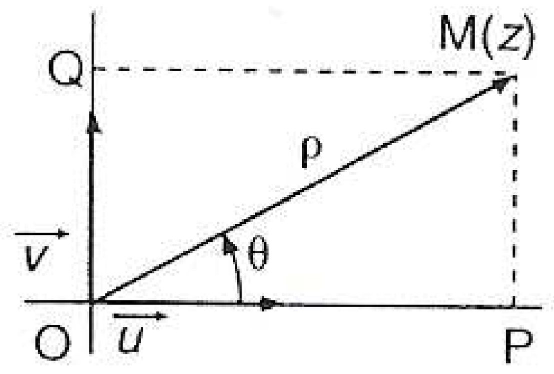
Forme trigonométrique :
$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$.

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

$\overline{OP} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$.

$\overline{OQ} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$.

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$.
$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$.
$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$.
$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$.

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$.
$|zz'| = |z|\,|z'|$.
$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$.
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

B. Identités remarquables

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

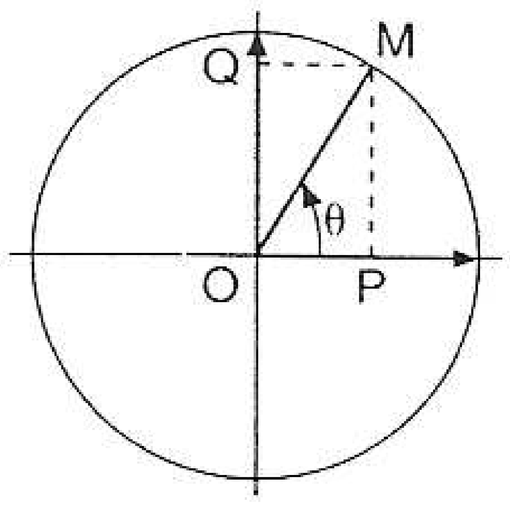
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $\quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.

C. Trigonométrie



$\overline{OP} = \cos\theta$.

$\overline{OQ} = \sin\theta$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\quad \theta \neq \frac{\pi}{2} - k\pi$.

Formules d'Euler

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$; $\quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$;

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$;

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.

Formules de transformation (spécialité)

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$.

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$.

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$.

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formule de Moivre et applications

Pour tout entier naturel non nul n, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (spécialité)

$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $\quad$ où $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Les solutions de $z^n = a$, $\quad$ où $\quad a = \rho\, e^{i\alpha}$, sont

$z_k = z_0 u_k$, $\quad$ où $\quad z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

D. Équation du second degré

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles ;

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double ;

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées ;

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $\quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

E. Suites arithmétiques, suites géométriques

(Formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ;

$u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$.

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques

Premier terme u_0 ;

$u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$;

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$.

IV. ANALYSE

A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$

$\ln 1 = 0; \quad \ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$.

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

B. Limites usuelles de fonctions et de suites

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$,

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$.

Comportement à l'origine de $\ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$, $(1 + x)^\alpha$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1; \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1; \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

$$\begin{cases} (1 + h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\,\varepsilon(h) \quad (\alpha \neq 0) \\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \end{cases}$$

Croissances comparées à l'origine

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$.

2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$.

Si $a > 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$; si $0 < a < 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$.

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

C. Dérivées et primitives

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives.)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$
$e^{rx},\ r = \alpha + i\beta$	re^{rx}	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f + g)' = f' + g'$;

$(kf)' = kf'$;

$(fg)' = f'g + fg'$.

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$;

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

$(e^u)' = e^u u'$.

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

D. Calcul intégral

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Si $g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, alors $g'(x) = f(x)$.

$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$.

$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Intégration par parties

$\int_a^b u(t)\,v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\mathrm{d}t$.

E. Équations différentielles

Équation:	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$:
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + ay' + by = 0$, équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant Δ	• si $\Delta > 0$, $f(x) = \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique • si $\Delta = 0$, $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique • si $\Delta < 0$, $f(x) = (\lambda\cos\beta x + \mu\sin\beta x)e^{\alpha x}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.